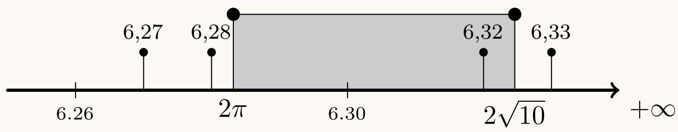
Prova final de Matemática - 3.º ciclo (2019, 2.ª fase)

Proposta de resolução

Caderno 1

1. Como $2\pi \approx 6{,}283$ temos que $6{,}27 < 6{,}28 < 2\pi$; e como $2\sqrt{10} \approx 6{,}325$, temos que $6{,}32 < 2\sqrt{10} < 6{,}33$



Assim, de entre os números apresentados, o único que pertencente ao conjunto I é 6,32.

Resposta: **Opção C**

2. Como 35% da área de Portugal é coberta por floresta, temos que a área da floresta é:

$$9{,}2 \times \frac{35}{100} = 3{,}22 \text{ milhões de hectares}$$

Assim, escrevendo este número em hectares, em notação científica, vem:

$$3{,}22 \text{ milhões de hectares} = 3\,220\,000 \text{ hectares} = 3{,}22 \times 10^6 \text{ hectares}$$

3. Ordenando os diâmetros dos troncos podemos identificar a posição dos quartis da distribuição:

$$\underbrace{21 \ \overbrace{26 \ \ 42}^{Q_1} \ 45}_{4} \ \overbrace{50}^{\tilde{x}} \ \underbrace{72 \ \overbrace{73 \ \ 76}^{Q_3} \ 82}_{4}$$

Logo, o 3.º quartil deste conjunto de dados corresponde à média dos 7.º e 8.º diâmetros da lista, ou seja:

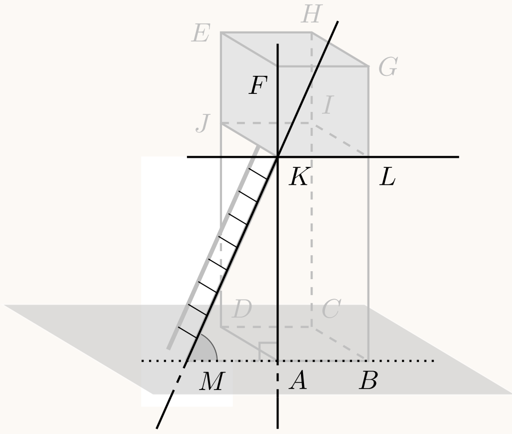
$$Q_3 = \frac{73 + 76}{2} = 74{,}5$$

Resposta: **Opção D**

4.

4.1. Observando cada uma das retas apresentadas nas diferentes opções, temos que:

- A reta $[KM]$ interseta o plano $[ABCD]$ no ponto M, pelo que é secante ao plano e não é perpendicular porque $A\hat{M}K = 66°$
- A reta $[AB]$ pertence ao plano $[ABCD]$ porque sabemos que tem dois pontos em comum com o plano (os pontos A e B)
- A reta $[AF]$ é perpendicular ao plano $[ABCD]$ porque $K\hat{A}M = 90°$
- A reta $[KL]$ é paralela ao plano $[ABCD]$ porque pertence ao plano JKL e os planos JKL e EFG são paralelos.



Logo, de entre as opções apresentadas, a reta KM é única reta secante e não perpendicular ao plano que contém a base $[ABCD]$

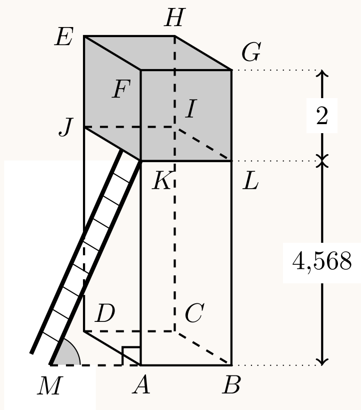
Resposta: **Opção A**

4.2. Como $K\hat{A}M = 90°$, então o triângulo $[KAM]$ é retângulo em A, sendo o lado $[KM]$ a hipotenusa e o lado $[AK]$ o cateto oposto relativamente ao ângulo AMK.

Desta forma, como $A\hat{M}K = 66°$ e $\overline{KM} = 5$, usando a definição de seno, temos que:

$$\text{sen } A\hat{M}K = \frac{\overline{AK}}{\overline{KM}} \Leftrightarrow \text{sen } 66° = \frac{\overline{AK}}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 \times \text{ sen } 66° = \overline{AK} \Rightarrow \overline{AK} \approx 4{,}568 \text{ m}$$



Como a distância entre os planos paralelos JKL e EFG é 2 m, temos que $\overline{KF} = 2$ m, e assim, a altura da torre, em metros, arredondado às décimas, é:

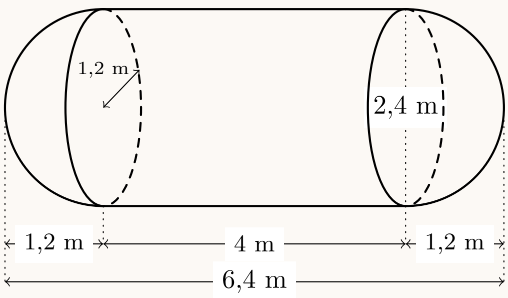
$$\overline{AF} = \overline{AK} + \overline{KF} \approx 4{,}568 + 2 \approx 6{,}6 \text{ m}$$

5.

5.1. Como o sólido pode ser decomposto num cilindro e em duas semiesferas, e as duas semiesferas têm bases com o mesmo diâmetro, têm volumes iguais.

Como o diâmetros das bases é 2,4 m, o respetivo raio é $\frac{2{,}4}{2} = 1{,}2$ m

Como o comprimento da cisterna é 6,4 m, a altura do cilindro (h) pode ser calculado subtraindo os raios das semiesferas ao comprimento da cisterna:



$$h = 6{,}4 - 2 \times 1{,}2 = 6{,}4 - 2{,}4 = 4 \text{ m}$$

Assim, o volume da cisterna, em m^3, arredondado às décimas, é a soma dos volumes do cilindro e das duas semi-esferas:

- $V_{\text{Semiesfera}} = \frac{V_{\text{Esfera}}}{2} = \frac{\frac{4}{3}\pi \times 1{,}2^3}{2} \approx 3{,}619 \text{ m}^3$
- $V_{\text{Cilindro}} = A_{\text{Base}} \times Altura = \pi \times 1{,}2^2 \times 4 \approx 18{,}096 \text{ m}^3$
- $V_{\text{Cisterna}} = 2 \times V_{\text{Semiesfera}} + V_{\text{Cilindro}} \approx 2 \times 3{,}619 + 18{,}096 \approx 25{,}3 \text{ m}^3$

5.2. Como a plataforma tem a forma de um retângulo $[ABC]$ é um triângulo retângulo em B, e assim, recorrendo ao Teorema de Pitágoras para calcular $\overline{AC}$, temos:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 6{,}4^2 + 2{,}4^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 40{,}96 + 5{,}76 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 46{,}72 \underset{\overline{AC}>0}{\Rightarrow} \overline{AC} = \sqrt{46{,}72} \text{ m}$$

Assim, como $\sqrt{46{,}72} \approx 6{,}8$, o valor de $\overline{AC}$, ou seja, o comprimento da barra diagonal, em metros, arredondado às décimas é 6,8 m.

6. Como $\frac{17}{49}$ é uma razão de números inteiros, é um número racional, e como $\sqrt[3]{125} = 5$ também é um número racional.

π e $\sqrt{34}$ são números irracionais.

Assim, os números racionais que pertencem ao conjunto A, são $\frac{17}{49}$ e $\sqrt[3]{125}$

Caderno 2

7.

7.1. Recorrendo à Regra de Laplace, e verificando que, estão 6 árvores disponíveis, ou seja, 6 casos possíveis; e que apenas se pretende calcular a probabilidade ser sorteada para a turma da Joana uma azinheira, havendo apenas uma única azinheira, ou seja, 1 caso favorável, temos que a probabilidade, escrita na forma de fração, é:

$$p = \frac{1}{6}$$

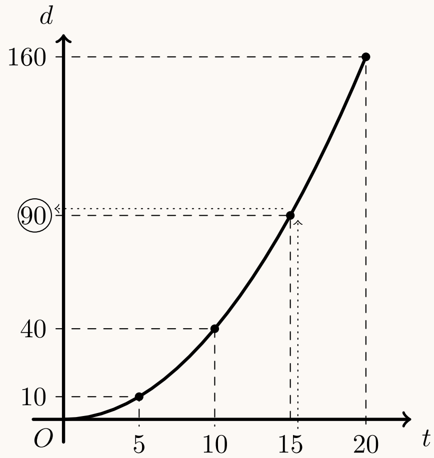
7.2. Como a turma do José vai plantar duas árvores, podemos organizar todos os pares de duas árvores que podem ser escolhidos, com recurso a uma tabela:

	Sobreiro 1	Sobreiro 2	Sobreiro 3	Carvalho 1	Carvalho 2	Azinheira
Sobreiro 1	—	S S	S S	S C	S C	S A
Sobreiro 2	—	—	S S	S C	S C	S A
Sobreiro 3	—	—	—	S C	S C	S A
Carvalho 1	—	—	—	—	C C	C A
Carvalho 2	—	—	—	—	—	C A
Azinheira	—	—	—	—	—	—

Assim, podemos observar que existem 16 pares de árvores que podem ser sorteados, dos quais 3 são constituídos sobreiros, ou seja, calculando a probabilidade pela Regra de Laplace, e escrevendo o resultado na forma de uma fração irredutível, temos:

$$p = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

8.



8.1. Da observação do gráfico podemos verificar que a imagem do objeto 15 é 90, ou seja:

$$d(15) = 90$$

Pelo que 15 segundos depois de iniciar o voo a distância, em metros, do drone à plataforma era 90.

8.2. Como a expressão da função é dada por uma expressão do tipo $d(t) = at^2$, e sabemos que $d(10) = 40$, substituindo os valores de t e de d, podemos calcular o valor de a:

$$d(t) = at^2 \underset{t=10 \text{ e } d=40}{\Leftrightarrow} 40 = a \times 10^2 \Leftrightarrow 40 = a \times 100 \Leftrightarrow \frac{40}{100} = a \Leftrightarrow \frac{4}{10} = a \Leftrightarrow \frac{2}{5} = a$$

Resposta: **Opção C**

9. Resolvendo a inequação, temos:

$$\frac{x-4}{6} - \frac{1}{3} < 2(x+1) \Leftrightarrow \frac{x-4}{6} - \frac{1}{3} < 2x+2 \Leftrightarrow \frac{x-4}{6} - \frac{1}{3}_{(2)} < \frac{2x}{1}_{(6)} + \frac{2}{1}_{(6)} \Leftrightarrow \frac{x-4}{6} - \frac{2}{6} < \frac{12x}{6} + \frac{12}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-4-2 < 12x+12 \Leftrightarrow x-12x < 12+4+2 \Leftrightarrow -11x < 18 \Leftrightarrow 11x > -18 \Leftrightarrow x > \frac{-18}{11} \Leftrightarrow x > -\frac{18}{11}$$

$$\text{C.S.} = \left] -\frac{18}{11}, +\infty \right[$$

10. Como a equação está escrita na fórmula canónica, usando a fórmula resolvente para resolver a equação, e escrevendo as soluções na forma de fração irredutível, temos:

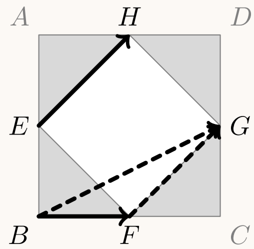
($a = 20$, $b = -9$ e $c = 1$)

$$20x^2 - 9x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4(20)(1)}}{2(20)} \Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 80}}{40} \Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{1}}{40} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{9+1}{40} \lor x = \frac{9-1}{40} \Leftrightarrow x = \frac{10}{40} \lor x = \frac{8}{40} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \lor x = \frac{1}{5}$$

C.S.$=\left\{\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right\}$

11.



11.1. Observando que $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EH}$ (porque são vetores com a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento), então temos que:

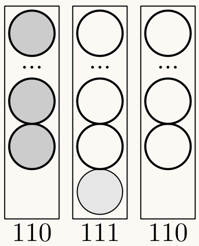
$$\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BG}$$

11.2. Como $\overline{AB} = x - 5$ é a medida do lado do quadrado $[ABCD]$, determinando a expressão da respetiva área, fazendo o desenvolvimento do caso notável, temos:

$$(x-5)(x-5) = (x-5)^2 = x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$$

Resposta: **Opção B**

12. Observando que o número de círculos na coluna da esquerda é igual ao número de círculos na coluna da direita, e que, na coluna central existe mais um círculo que nas restantes, temos que o termo em consideração tem:



- 110 círculos cinzentos (coluna da esquerda);
- 110 círculos na coluna da direita (em número igual à coluna da esquerda)
- 111 círculos na coluna central (mais um que cada uma das anteriores)

Assim, o número total de círculos do termo é:

$$110 + 111 + 110 = 331$$

13. Como um grupo de 4 amigos deveria contribuir com 12 euros cada um, e o contributo de cada participante na compra é inversamente proporcional ao número de participantes, temos que o valor total do cheque é:

$$4 \times 12 = 48 \text{ euros}$$

Assim, quando se juntaram mais dois amigos ao grupo, o total de participantes na compra passou a ser de $4 + 2 = 6$, pelo que a quantia, em euros, com que cada amigo contribuiu para a compra do cheque, é:

$$\frac{48}{6} = 8 \text{ euros}$$

14. Como o ângulo ACB é o ângulo inscrito relativo ao arco AB, a amplitude do arco é o dobro da amplitude do arco, ou seja:

$$\overset{\frown}{AB} = 2 \times A\hat{C}B = 2 \times 30 = 60^\circ$$

Assim, considerando que o arco AB tem 5 centímetros de comprimento e estabelecendo a relação de proporcionalidade direta entre os comprimentos dos arcos e as respetivas amplitudes, calculamos o perímetro do círculo ($P_\circ$), em centímetros, correspondente a um arco com 360° de amplitude:

$$\frac{P_\circ}{360} = \frac{5}{\overset{\frown}{AB}} \Leftrightarrow \frac{P_\circ}{360} = \frac{5}{60} \Leftrightarrow P_\circ = \frac{5 \times 360}{60} \Leftrightarrow P_\circ = 5 \times \frac{36}{6} \Leftrightarrow P_\circ = 5 \times 6 \Leftrightarrow P_\circ = 30 \text{ cm}$$

15. Como x é o número de caiaques de um lugar e y é o número de caiaques de dois lugares utilizados na descida do rio, e foram utilizados 28 caiaques, então temos que $x + y = 28$

Por outro lado o número de pessoas que ocuparam caiaques de um lugar é x e o número de pessoas que ocuparam caiaques de dois lugares é $2y$, pelo que, como haviam mais 4 pessoas em caiaques de um lugar do que em caiaques de dois lugares, temos que $2y + 4 = x$

Assim, um sistema de equações que permita determinar o número de caiaques de cada tipo utilizados na descida do rio, é:

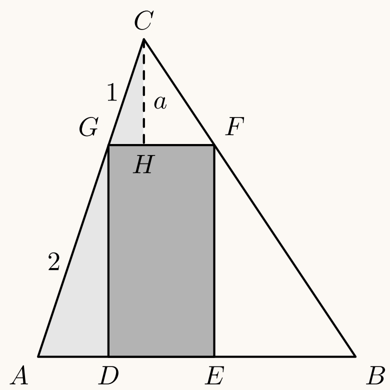
$$\begin{cases} x + y = 28 \\ \\ 2y + 4 = x \end{cases}$$

16. Como $\overline{AC} = 3$ e $\overline{CG} = 1$ e o ponto G pertence ao lado $[AC]$, temos que:

$$\overline{AG} + \overline{CG} = \overline{AC} \Leftrightarrow \overline{AG} + 1 = 3 \Leftrightarrow \overline{AG} = 3 - 1 \Leftrightarrow \overline{AG} = 2$$

Como os triângulos $[ADG]$ e $[GHC]$ são semelhantes (pelo critério AA, têm ambos um ângulo reto e os ângulos DAG e HGC são ângulos de lados paralelos), então:

$$\frac{\overline{DG}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{CG}} \Leftrightarrow \frac{\overline{DG}}{a} = \frac{2}{1} \Leftrightarrow \overline{DG} = 2a$$



Assim, como $\overline{FG} = a$, temos que a área do retângulo $[DEFG]$, em função de a, é:

$$A_{[DEFG]} = \overline{DG} \times \overline{FG} = 2a \times a = 2a^2$$