

## Prova final de Matemática - 3.º ciclo (2018, Época especial)

Proposta de resolução



---

### Caderno 1

---

1. Como os dados da tabela já estão ordenados podemos verificar que os valores centrais, são 61,6 e 63,4.

$$\underbrace{56,6 \ 59,7 \ 61,6}_{50\%} \quad \underbrace{63,4 \ 68,5 \ 73,0}_{50\%}$$

Logo a mediana,  $\tilde{x}$ , do conjunto de dados é

$$\tilde{x} = \frac{61,6 + 63,4}{2} = \frac{125}{2} = 62,5$$

Resposta: **Opção B**

2. Como  $x$  é uma aproximação de 3,6, com um erro inferior a 0,1, temos que  $3,5 < x < 3,7$ , e como  $5,3 < y < 5,5$ , vem que:

$$3,5 + 5,3 < x + y < 5,5 + 3,7 \Leftrightarrow 8,8 < x + y < 9,2$$

Resposta: **Opção A**

3. De acordo com os dados do enunciado, a diferença entre a distância da Terra a Marte no dia 30 de maio de 2016 e a distância que foi prevista para o dia 31 de julho de 2018 é:

$$75,3 - 57 = 18,3 \text{ milhões de quilómetros}$$

Assim, escrevendo o resultado em quilómetros, e depois em notação científica, temos:

$$18,3 \text{ milhões de quilómetros} = 18\,300\,000 \text{ quilómetros} = 1,83 \times 10^7 \text{ quilómetros}$$

4. Como o ângulo  $ABC$  é reto, então o triângulo  $[ABC]$  é retângulo em  $B$  e, relativamente ao ângulo  $BAC$ , o lado  $[AB]$  é o cateto adjacente e o lado  $[AC]$  é a hipotenusa, pelo que, usando a definição de cosseno, temos:

$$\cos B\hat{A}C = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \cos 35^\circ = \frac{\overline{AB}}{46} \Leftrightarrow \overline{AB} = 46 \times \cos 35^\circ$$

Como  $\cos 35^\circ \approx 0,82$ , vem que:

$$\overline{AB} \approx 46 \times 0,82 \approx 37,72 \text{ m}$$

Assim, como  $\overline{AB} = \overline{EF}$  (porque os triângulos  $[ABC]$  e  $[DEF]$  são iguais pelo critério LAL), e  $\overline{BF} = \overline{CD}$ , temos que:

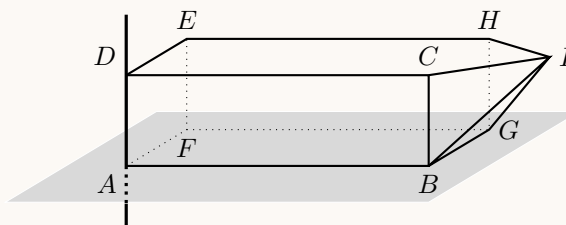
$$\overline{AE} = \overline{AB} + \underbrace{\overline{BF}}_{\overline{CD}} + \underbrace{\overline{EF}}_{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AE} = 2 \times \overline{AB} + \overline{CD} \Leftrightarrow \overline{AE} - 2 \times \overline{AB} = \overline{CD} \Leftrightarrow$$

Logo, como  $\overline{AE} = \overline{AC} + \overline{ED} = 46 + 46 = 92$  metros e  $\overline{AB} \approx 37,72$  metros, temos que a distância entre os pontos  $C$  e  $D$ , em metros, arredondado às unidades, é:

$$\overline{CD} \approx 92 - 2 \times 37,72 \approx 16,56 \approx 17 \text{ m}$$

5.

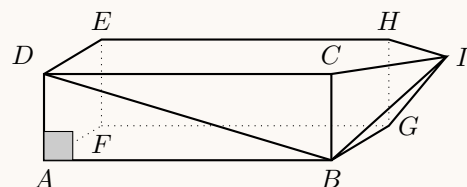
- 5.1. Como o plano definido pelas retas  $AG$  e  $BF$  é o plano  $AFG$ , ou seja, o plano que contém a face lateral  $[AFGB]$  do paralelepípedo retângulo, então, qualquer reta que contenha uma aresta de uma base do paralelepípedo que não pertença a esta face nem seja paralela, é perpendicular a este plano, por exemplo a reta  $AD$



- 5.2. Como o triângulo  $[ABD]$  é um triângulo retângulo em  $A$ , (porque  $[ABCDEFGH]$  é paralelepípedo retângulo) podemos, recorrer ao Teorema de Pitágoras, para calcular o valor de  $\overline{BD}$ :

$$\begin{aligned} \overline{BD}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 \Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 10^2 + 3^2 \Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 100 + 9 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 109 \underset{\overline{BD} > 0}{\Rightarrow} \overline{BD} = \sqrt{109} \text{ cm} \end{aligned}$$

Assim, como  $\sqrt{109} \approx 10,4$ , o valor de  $\overline{BD}$  arredondado às décimas é 10,4 cm



- 5.3. Recorrendo à fórmula do volume da esfera podemos calcular o raio,  $r$ , de cada tanque esférico:

$$V_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \Leftrightarrow 33\,750 = \frac{4}{3}\pi r^3 \Leftrightarrow \frac{33\,750 \times 3}{4\pi} = r^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{33\,750 \times 3}{4\pi}} = r \Rightarrow r \approx 20,05 \text{ m}$$

Como os quatro tanques esféricos estão encostados sem serem deformados, o valor de  $x$  corresponde a quatro diâmetros dos tanques, ou seja a  $2 \times 4 = 8$  diâmetros, pelo que o valor de  $x$  em metros, arredondado às unidades, é:

$$x = 8r \approx 8 \times 20,05 \approx 160,4 \approx 160 \text{ m}$$

6. Como  $20^3 = 8000$ , temos que  $[0, \sqrt[3]{8000}] \cap ]20, +\infty[$  é o conjunto vazio ( $20 \in [0, \sqrt[3]{8000}]$ , mas  $20 \notin ]20, +\infty[$ , porque o intervalo é aberto).

Assim, como  $\sqrt[3]{8001} > 20$ , temos que  $[0, \sqrt[3]{8001}] \cap ]20, +\infty[$  não é o conjunto vazio, e como não existem números inteiros maiores que 8000 e menores que 8001, temos que o menor número natural,  $n$  tal que  $[0, \sqrt[3]{n}] \cap ]20, +\infty[$  é um conjunto não vazio, é o número 8001



---

**Caderno 2**

---

7.

- 7.1. Como ao selecionar ao acaso um dos elementos da equipa, a probabilidade de o elemento selecionado ser rapariga é 50%, então nessa equipa existem tantas raparigas como rapazes, e de entre as três equipas, a única com esta característica é a a equipa B.
- 7.2. Como é escolhido um elemento da equipa A e um elemento da equipa B, podemos organizar todos os pares de elementos que podem ser escolhidos, com recurso a uma tabela:

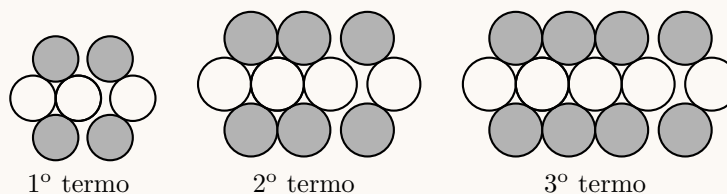
Equipa B Equipa A	Rapaz	Rapaz	Rapariga	Rapariga
Rapaz	♂♂	♂♂	♂♀	♂♀
Rapaz	♂♂	♂♂	♂♀	♂♀
Rapariga	♀♂	♀♂	♀♀	♀♀

Assim, podemos observar que existem 12 pares diferentes que podem ser escolhidos, dos quais apenas 4 são compostos por dois rapazes, ou seja, calculando a probabilidade pela Regra de Laplace de que os dois capitães sejam ambos rapazes, e apresentado o resultado na forma de fração irredutível, temos:

$$p = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

8. Considerando que o primeiro termo é constituído por 4 círculos (2 brancos e dois cinzentos) e mais 3 círculos (dois cinzentos e um branco), e que em cada termo são adicionados mais 3 círculos (dois cinzentos e um branco), o termo de ordem  $n$  terá um total de 4 círculos, mais  $3 \times n$  círculos, ou seja, um total de:

$$4 + \underbrace{3 + 3 + \dots + 3}_{n \text{ vezes}} = 4 + 3 \times n = 3n + 4 \text{ círculos}$$



Resposta: **Opção C**

9. Como a reta  $s$  é paralela à reta  $r$ , os respetivos declives são iguais, pelo que uma equação da reta  $s$  é da forma:

$$y = -2x + b$$

Substituindo as coordenadas do ponto da reta  $s$ ,  $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ , podemos determinar o valor da ordenada da origem ( $b$ ):

$$0 = -2 \times \frac{3}{2} + b \Leftrightarrow 0 = -3 + b \Leftrightarrow 3 = b$$

E assim, temos que uma equação da reta  $s$  é:

$$y = -2x + 3$$



10. Fazendo o desenvolvimento do caso notável vem:

$$(x - 3)^2 = x^2 - 2 \times 3 \times x + 3^2 = x^2 - 6x + 9 = x^2 + (-6)x + 9$$

Assim, como  $(x - 3)^2 = x^2 + mx + n$ , temos que  $m = -6$  e  $n = 9$

Resposta: **Opção C**

11. Como a equação está escrita na fórmula canônica, usando a fórmula resolvente para resolver a equação, e escrevendo as soluções na forma de fração irredutível, temos:

$$(a = 15, b = 2 \text{ e } c = -1)$$

$$15x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(15)(-1)}}{2(15)} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{30} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{30} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 + 8}{30} \vee x = \frac{-2 - 8}{30} \Leftrightarrow x = \frac{6}{30} \vee x = \frac{-10}{30} \Leftrightarrow x = \frac{3}{15} \vee x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{5} \vee x = -\frac{1}{3}$$

$$\text{C.S.} = \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{1}{5} \right\}$$

12. Resolvendo a inequação, temos:

$$\frac{1-x}{2} < 3(2x-1) \Leftrightarrow \frac{1-x}{2} < 6x-3 \Leftrightarrow \frac{1-x}{2} < \frac{6x}{1} - \frac{3}{1} \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \frac{1-x}{2} < \frac{12}{x} - \frac{6}{1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-x < 12x-6 \Leftrightarrow -12x-x < -6-1 \Leftrightarrow -13x < -7 \Leftrightarrow 13x > 7 \Leftrightarrow x > \frac{7}{13}$$

$$\text{C.S.} = \left] \frac{7}{13}, +\infty \right[$$

13. Calculando a imagem do objeto 2 pela função  $f$ , temos:

$$f(2) = \frac{6}{2} = 3$$

Assim, como os gráficos das funções  $f$  e  $g$  se intersectam no ponto de abscissa 2, então  $f(2) = g(2)$ , ou seja,  $g(2) = 3$ , pelo que sabemos que o ponto de coordenadas (2,3) pertence ao gráfico de  $g$

Como  $g(x) = ax^2$ , substituindo as coordenadas do ponto, substituindo as coordenadas na expressão algébrica da função podemos calcular o valor de  $a$ :

$$g(2) = 3 \Leftrightarrow a \times 2^2 = 3 \Leftrightarrow a \times 4 = 3 \Leftrightarrow a = \frac{3}{4}$$

14. Usando as regras operatórias de potências e escrevendo o resultado na forma de uma potência de base  $\frac{1}{3}$ , temos que:

$$\frac{3^{11}}{3^7} \times 3^{-6} = \frac{3^{11}}{3^7} \times \frac{1}{3^6} = \frac{3^{11} \times 1}{3^7 \times 3^6} = \frac{3^{11}}{3^{7+6}} = \frac{3^{11}}{3^{13}} = 3^{11-13} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1^2}{3^2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$



15. Como  $x$  o número de rapazes e  $y$  o número de raparigas que se inscreveram inicialmente na modalidade do desporto escolar e inscreveram-se inicialmente, 45 alunos, rapazes e raparigas, temos que  $x + y = 45$

Como se inscreveram mais 4 rapazes, o número de rapazes alterou-se para  $x + 4$  e como desistiram 4 raparigas, o número de raparigas passou a ser de  $y - 4$ . Nestas condições o número de rapazes a ser o dobro do número de raparigas, ou seja,  $x + 4 = 2(y - 4)$

Assim, um sistema de equações que permita determinar o número de rapazes e o número de raparigas que se inscreveram inicialmente na modalidade do desporto escolar, é:

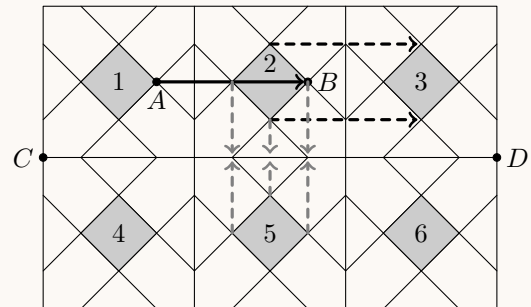
$$\begin{cases} x + y = 45 \\ x + 4 = 2(y - 4) \end{cases}$$

16. Temos que:

- a reflexão do quadrado 5 relativamente ao eixo  $CD$  é o quadrado 2
- a translação do quadrado 2 associada ao vetor  $\overrightarrow{AB}$  é o quadrado 3

Assim, a imagem do quadrado 5 pela reflexão deslizante de eixo  $CD$  e vetor  $\overrightarrow{AB}$ , é o quadrado 3

Resposta: **Opção B**



- 17.

- 17.1. Como o ângulo  $CBA$  é o ângulo inscrito relativo ao arco  $CA$ , a amplitude do arco é o dobro da amplitude do arco, ou seja:

$$\widehat{CA} = 2 \times \widehat{CBA} = 2 \times 85 = 170^\circ$$

Temos ainda que:

$$\widehat{BC} + \widehat{CA} + \widehat{AB} = 360 \Leftrightarrow \widehat{BC} + 170 + 110 = 360 \Leftrightarrow \widehat{BC} = 360 - 170 - 110 \Leftrightarrow \widehat{BC} = 80^\circ$$

Desta forma, como o ângulo  $BAC$  é o ângulo inscrito relativo ao arco  $BC$ , a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco, ou seja:

$$\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{80}{2} = 40^\circ$$

- 17.2. Como os triângulos  $[ABC]$  e  $[DEC]$  são semelhantes, porque têm um ângulo comum e os lados opostos ao ângulo comum são paralelos, temos que:

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{DA}}$$

Resposta: **Opção A**

