Prova final de Matemática - 3.º ciclo **(2018, 2.ª fase)**

Proposta de resolução

Caderno 1

1. Ordenando os dados da tabela podemos identificar os quartis da distribuição:

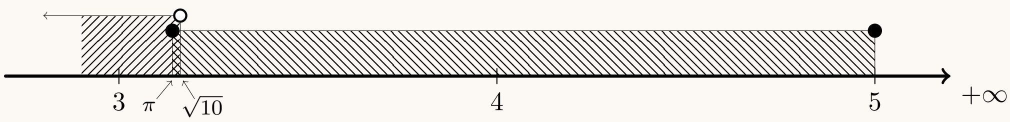
$$\underbrace{421 \quad \overbrace{435}^{Q_1} \quad 468}_{3} \quad \overbrace{540}^{\tilde{x}} \quad \underbrace{553 \quad \overbrace{604}^{Q_3} \quad 634}_{3}$$

Logo a amplitude interquartil, do conjunto de dados é:

$$Q_3 - Q_1 = 604 - 435 = 169$$

Resposta: **Opção A**

2. Como $\pi \approx 3{,}14$ e $\sqrt{10} \approx 3{,}16$, representando na reta real os conjuntos A e B, temos:



Assim temos que:

$$A \cap B = \left]-\infty, \sqrt{10}\right[\cap [\pi, 5] = \left[\pi, \sqrt{10}\right[$$

3. No total dos dois arranha-céus foram utilizados $3 \times 10{,}5$ mil toneladas de aço (10,5 mil toneladas no primeiro arranha-céus e $2 \times 10{,}5$ mil toneladas no segundo).
Temos ainda que:

$$10{,}5 \text{ mil toneladas} = 10\,500 \text{ toneladas} = 1{,}05 \times 10^4 \text{ toneladas}$$

Assim, a quantidade total de aço, em toneladas, que foi utilizada na construção dos dois arranha-céus em notação científica, é:

$$3 \times 1{,}05 \times 10^4 = 3{,}15 \times 10^4 \text{ toneladas}$$

4. Sabemos que $[BCM]$ é um triângulo retângulo em M (porque o triângulo $[ABC]$ é isósceles, com $\overline{AC} = \overline{AB}$ e M é o ponto médio do segmento de reta $[AB]$).

Temos ainda que, como M é o ponto médio do segmento de reta $[AB]$, então $\overline{AM} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{4{,}62}{2} = 2{,}31$ m
Como relativamente ao ângulo ACM, o lado $[AM]$ é o cateto oposto e o lado $[MC]$ é o cateto adjacente, recorrendo à definição de tangente de um ângulo, e substituindo as medidas dos lados, temos que:

$$\operatorname{tg} A\hat{C}M = \frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = \frac{2{,}31}{4{,}35}$$

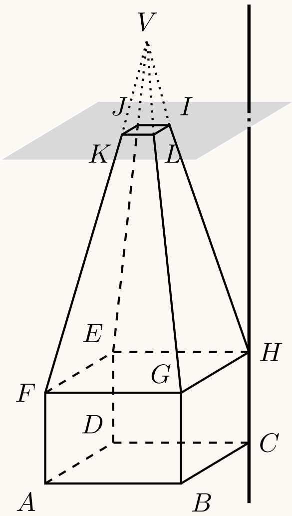
Como $\frac{2{,}31}{4{,}35} \approx 0{,}531$, procurando o valor mais próximo na coluna dos valores da tangente na tabela de valores das razões trigonométricas (ou recorrendo à calculadora), temos que a amplitude do ângulo $A\hat{C}M$ é:

$$A\hat{C}M = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2{,}31}{4{,}35}\right) \approx 28^\circ$$

Como o segmento $[CM]$ é a bissetriz do ângulo ACB, temos que:

$$A\hat{C}B = 2 \times A\hat{C}M \approx 2 \times 28 = 56^\circ$$

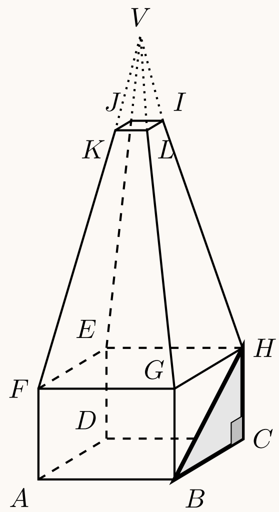
5.



5.1. Como $[ABCDEFGH]$ é prisma reto de bases quadradas, então a reta CH é perpendicular à face $[EFGH]$.

Como as faces $[EFGH]$ e $[IJKL]$ são paralelas, então a reta CH também é perpendicular à face $[IJKL]$, ou seja, ao plano que contém esta face.

Resposta: **Opção B**



5.2. Como o triângulo $[BCH]$ é um triângulo retângulo em C, (porque $[ABCDEFGH]$ é prisma reto) podemos, recorrer ao Teorema de Pitágoras, para calcular o valor de $\overline{BH}$:

$$\overline{BH}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CH}^2 \Leftrightarrow \overline{BH}^2 = 9^2 + 6^2 \Leftrightarrow \overline{BH}^2 = 81 + 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{BH}^2 = 117 \underset{\overline{BH}>0}{\Rightarrow} \overline{BH} = \sqrt{117} \text{ cm}$$

Assim, como $\sqrt{117} \approx 10{,}8$, o valor de $\overline{BH}$ arredondado às décimas é $10{,}8$ cm

5.3. Podemos calcular o volume do tronco de pirâmide $[EFGHIJKL]$, como a diferença dos volumes das duas pirâmides $[EFGHV]$ e $[IJKLV]$
Assim, calculando o volume das duas pirâmides, temos que:

- a altura da pirâmide $[EFGHV]$ é 24 e como a base é um quadrado de lado $\overline{GH}$, e $\overline{GH} = \overline{BC}$, vem que: $A_{[EFGH]} = \overline{GH}^2 = \overline{BC}^2 = 9^2 = 81$ cm^2

  E desta forma:

$$V_{[EFGHV]} = \frac{1}{3} \times A_{[EFGH]} \times altura = \frac{1}{3} \times 9^2 \times 24 = \frac{81 \times 24}{3} = 648 \text{ cm}^3$$

- a altura da pirâmide $[IJKLV]$ é a diferença entre a altura da pirâmide $[EFGHV]$ e a distância entre os planos que contêm as bases, ou seja::

$$\text{altura da pirâmide } [IJKLV] \ = 24 - 16 = 8 \text{ cm}$$

  e como a base é um quadrado de lado $\overline{KL}$, vem que: $A_{[IJKL]} = \overline{KL}^2 = 3^2 = 9$ cm^2

  E desta forma:

$$V_{[IJKLV]} = \frac{1}{3} \times A_{[IJKL]} \times altura = \frac{1}{3} \times 3^2 \times 8 = \frac{9 \times 8}{3} = 24 \text{ cm}^3$$

E assim temos que o volume do tronco de pirâmide é:

$$V_{[EFGHIJKL]} = V_{[EFGHV]} - V_{[IJKLV]} = 648 - 24 = 624 \text{ cm}^3$$

6. Como $a > b$, o valor médio entre a e b, é maior que b, e menor que a, ou seja:

$$b < \frac{a+b}{2} < a$$

Por outro lado, temos que:

$$a > b \ \Leftrightarrow \ -a < -b \ \Leftrightarrow \ -a + 1 < -b + 1 \ \Leftrightarrow \ 1 - a < 1 - b$$

Resposta: **Opção B**

Caderno 2

7.

7.1. Recorrendo à Regra de Laplace, e verificando que, existem 7 cartões, ou seja, 7 casos possíveis; e que apenas um tem a palavra «sábado», ou seja, 1 caso favorável, temos que a probabilidade, escrita na forma de fração, é:

$$p = \frac{1}{7}$$

7.2. Como os dois cartões são extraídos em simultâneo de entre um conjunto de 7, podemos organizar todas os pares de cartões que é possível extrair com recurso a uma tabela:

Cartão I \ **Cartão II**	2ª feira	3ª feira	4ª feira	5ª feira	6 ª feira	sábado	domingo
2ª feira	–	2ª e 3ª	2ª e 4ª	2ª e 5ª	2ª e 6ª	2ª e sáb	2ª e dom
3ª feira	–	–	3ª e 4ª	3ª e 5ª	3ª e 6ª	3ª e sáb	3ª e dom
4ª feira	–	–	–	4ª e 5ª	4ª e 6ª	4ª e sáb	4ª e dom
5ª feira	–	–	–	–	5ª e 6ª	5ª e sáb	5ª e dom
6ª feira	–	–	–	–	–	6ª e sáb	6ª e dom
sábado	–	–	–	–	–	–	sáb e dom
domingo	–	–	–	–	–	–	–

Assim, podemos observar que existem 21 pares diferentes de cartões que podem ser extraídos, dos quais apenas 10 não contem a palavra «sábado» nem a palavra «domingo», ou seja, calculando a probabilidade pela Regra de Laplace, e apresentado o resultado na forma de fração irredutível, temos:

$$p = \frac{10}{21}$$

8. Como o aparelho foi reprogramado depois do primeiro dia, recolheu 12 amostras no primeiro dia e 6 em cada um dos dias seguintes:

$$\overbrace{\underbrace{12}_{1^{\text{o}}\text{ dia}} + \underbrace{6 + 6 + 6 + \ldots + 6}_{n-1\text{ dias}}}^{n\text{ dias}}$$

Assim temos que o número total de amostras de água recolhidas pelo aparelho é dado por:

$$12 + \underbrace{6 + 6 + 6 + \ldots + 6}_{n-1\text{ vezes}} = 12 + 6 \times (n-1) = 12 + 6(n-1)$$

Resposta: **Opção D**

9. Como a reta r contém os pontos de coordenadas $(0,0)$ e $(4,-1)$, então podemos calcular o valor do declive:

$$m_r = \frac{-1-0}{4-0} = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$$

Como a reta s é paralela à reta r, os respetivos declives são iguais, pelo que uma equação da reta s é da forma:

$$y = -\frac{1}{4}x + b$$

Substituindo as coordenadas do ponto da reta s, $(8,-5)$, podemos determinar o valor da ordenada da origem (b):

$$-5 = -\frac{1}{4} \times 8 + b \Leftrightarrow -5 = -2 + b \Leftrightarrow 2 - 5 = b \Leftrightarrow -3 = b$$

E assim, temos que uma equação da reta s é:

$$y = -\frac{1}{4}x - 3$$

10. Temos que a área do pentágono $[ABCDE]$ pode ser calculada como a soma das áreas do quadrado $[ABCE]$ e do triângulo $[CDE]$:

$$A_{[ABCDE]} = A_{[ABCE]} + A_{[CDE]} = \overline{EC}^2 + \frac{\overline{EC} \times \text{ altura}}{2} = x^2 + \frac{x \times 4}{2} = x^2 + x \times 2 = x(x+2)$$

Resposta: **Opção A**

11. Como a equação está escrita na fórmula canónica, usando a fórmula resolvente para resolver a equação, e escrevendo as soluções na forma de fração irredutível, temos:

$(a = 24,\ b = 2 \text{ e } c = -1)$

$$24x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(24)(-1)}}{2(24)} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+96}}{48} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{48} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2+10}{48} \vee x = \frac{-2-10}{48} \Leftrightarrow x = \frac{8}{48} \vee x = \frac{-12}{48} \Leftrightarrow x = \frac{1}{6} \vee x = -\frac{2}{8} \Leftrightarrow x = \frac{1}{6} \vee x = -\frac{1}{4}$$

C.S.$=\left\{-\frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right\}$

12. Resolvendo a inequação, temos:

$$\frac{1}{4}(3-x) - 2 > \frac{1}{3}x \Leftrightarrow \frac{3}{4}_{(3)} - \frac{x}{4}_{(3)} - \frac{2}{1}_{(12)} > \frac{x}{3}_{(4)} \Leftrightarrow \frac{9}{12} - \frac{3x}{12} - \frac{24}{12} > \frac{4x}{12} \Leftrightarrow 9 - 3x - 24 > 4x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3x - 4x > -9 + 24 \Leftrightarrow -7x > 15 \Leftrightarrow 7x < -15 \Leftrightarrow x < \frac{-15}{7} \Leftrightarrow x < -\frac{15}{7}$$

C.S.$=\left]-\infty, -\frac{15}{7}\right[$

13. Calculando a imagem do objeto 4 pela função g, temos:

$$g(4) = \frac{8}{4} = 2$$

Assim, como $f(3) = g(4)$, temos que $f(3) = 2$, ou seja o ponto de coordenadas (3,2) pertence ao gráfico de f

Como $f(x) = ax^2$, substituindo as coordenadas do ponto, substituindo as coordenadas na expressão algébrica da função podemos calcular o valor de a:

$$f(3) = 2 \Leftrightarrow a \times 3^2 = 2 \Leftrightarrow a \times 9 = 2 \Leftrightarrow a = \frac{2}{9}$$

14. Como x é o número de itens em que foi assinalada a opção correta e y é o número de itens em que foi assinalada uma opção incorreta, e o teste é composto, exclusivamente, por 25 itens de escolha múltipla, temos que $x + y = 25$

    Como cada resposta correta é classificada com 4 pontos, x respostas corretas serão classificadas com $4x$ pontos. Da mesma forma, como cada resposta incorreta é classificada com -1 pontos, y respostas incorretas serão classificadas com $-y$ pontos.
    E assim, como a classificação do aluno foi de 70 pontos temos que $4x + (-y) = 70 \Leftrightarrow 4x - y = 70$

    Assim, um sistema de equações que permita determinar o número de itens em que foi assinalada a opção correta e o número de itens em que foi assinalada uma opção incorreta, é:

$$\begin{cases} x + y = 25 \\ \\ 4x - y = 70 \end{cases}$$

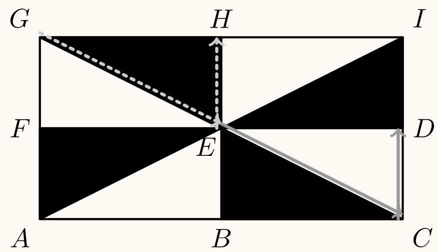
15. Usando as regras operatórias de potências e escrevendo o resultado na forma de uma potência de base $\frac{1}{6}$, temos que:

$$\frac{6^{-4}}{(2^4)^2 \times 3^8} = \frac{6^{-4}}{2^{4\times 2} \times 3^8} = \frac{6^{-4}}{2^8 \times 3^8} = \frac{6^{-4}}{(2 \times 3)^8} = \frac{6^{-4}}{6^8} = 6^{-4-8} = 6^{-12} = \frac{1}{6^{12}} = \frac{1^{12}}{6^{12}} = \left(\frac{1}{6}\right)^{12}$$

16. Como $\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{EC}$ e $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{CD}$, temos que:
    - $T_{\overrightarrow{GE}}(E) = T_{\overrightarrow{EC}}(E) = E + \overrightarrow{EC} = C$
    - $T_{\overrightarrow{EH}}(C) = T_{\overrightarrow{CD}}(C) = C + \overrightarrow{CD} = D$

    Assim, temos que:

$$T_{\overrightarrow{EH}}\left(T_{\overrightarrow{GE}}(E)\right) = T_{\overrightarrow{EH}}(C) = D$$



    Ou seja a imagem do ponto E pela translação composta $T_{\overrightarrow{GE}}$ com $T_{\overrightarrow{EH}}$ é o ponto D

17. Temos que:

    - Como $[CD]$ é um diâmetro da circunferência, então $\overset{\frown}{CD} = 180°$
    - $\overset{\frown}{CA} + \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CD} \Leftrightarrow 110 + \overset{\frown}{AD} = 180 \Leftrightarrow \overset{\frown}{AD} = 180 - 110 \Leftrightarrow \overset{\frown}{AD} = 70°$

    Como o ângulo ACD é o ângulo inscrito relativo ao arco AD, a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco, ou seja:

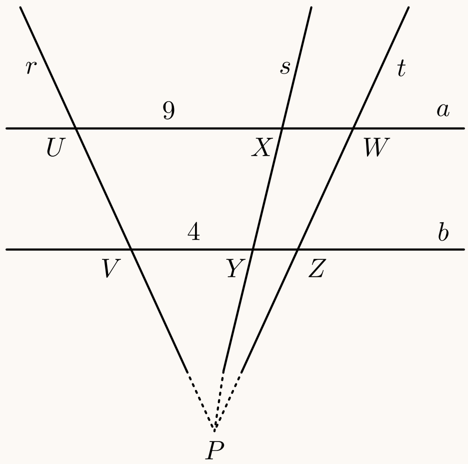
$$A\hat{C}B = A\hat{C}D = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} = \frac{70}{2} = 35°$$

    Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, e $A\hat{C}B = A\hat{C}D$ vem que:

$$A\hat{B}C + A\hat{C}B + B\hat{A}C = 180 \Leftrightarrow A\hat{B}C + 35 + 25 = 180 \Leftrightarrow A\hat{B}C = 180 - 35 - 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A\hat{B}C = 180 - 60 \Leftrightarrow A\hat{B}C = 120°$$

18. Como as retas r, s e t são concorrentes num ponto, designado por P o ponto onde se intersectam, temos que os triângulos $[UXP]$ e $[VYP]$ são semelhantes.
Como os lados $[UX]$ e $[VY]$ são correspondentes assim como os lados $[XP]$ e $[YP]$, temos que:



$$\frac{\overline{XP}}{\overline{YP}} = \frac{\overline{UX}}{\overline{VY}} \Leftrightarrow \frac{\overline{XP}}{\overline{YP}} = \frac{9}{4}$$

Por outro lado, temos também os triângulos $[XWP]$ e $[YZP]$ são semelhantes.
Como os lados $[XW]$ e $[YZ]$ são correspondentes assim como os lados $[XP]$ e $[YP]$, temos que:

$$\frac{\overline{XW}}{\overline{YZ}} = \underbrace{\frac{\overline{XP}}{\overline{YP}}}_{\frac{9}{4}} \Leftrightarrow \frac{\overline{XW}}{\overline{YZ}} = \frac{9}{4}$$

Resposta: **Opção C**