# Prova final de Matemática - 3.º ciclo (2018, 1.ª fase)

Proposta de resolução

## Caderno 1

1. Ordenando os dados da tabela podemos verificar que os valores centrais, são 166 e 189.

$$\underbrace{18\ \ 85\ \ 166}_{50\%}\ \underbrace{189\ \ 203\ \ 654}_{50\%}$$

Logo a mediana, $\tilde{x}$, do conjunto de dados é

$$\tilde{x} = \frac{166+189}{2} = \frac{355}{2} = 177{,}5$$

Resposta: **Opção A**

2. Temos que $3-\sqrt{7} \approx 0{,}35$, ou seja $0{,}3 < 3-\sqrt{7} < 0{,}4$
Assim, sendo $r$, o erro cometido com a aproximação, vem que $0{,}3 < r < 0{,}4$

Resposta: **Opção C**

3. Calculando 99% de 87 milhões, ou seja, o número de carros não elétricos vendidos em 2016, e escrevendo o resultado em notação científica, temos:

$$87\,000\,000 \times \frac{99}{100} = 8{,}7 \times 10^7 \times 0{,}99 = 8{,}7 \times 10^7 \times 0{,}99 = 8{,}7 \times 0{,}99 \times 10^7 = 8{,}613 \times 10^7$$

4. Como o triângulo $[MNO]$ é retângulo no vértice $E$ e, relativamente ao ângulo $DAE$, o lado $[AE]$ é o cateto adjacente e o lado $[AD]$ é a hipotenusa, usando a definição de cosseno, temos:

$$\cos D\hat{A}E = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \cos 32^\circ = \frac{\overline{AE}}{0{,}90} \Leftrightarrow \overline{AE} = 0{,}9 \times \cos 32^\circ$$

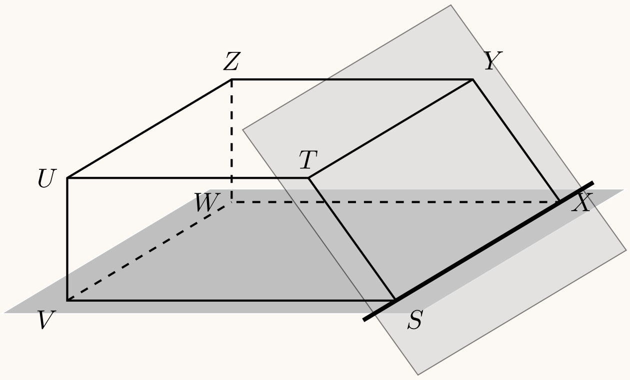
Como $\cos 32^\circ \approx 0{,}848$, vem que:

$$\overline{AE} \approx 0{,}9 \times 0{,}848 \approx 0{,}763 \text{ m}$$

Como $\overline{EF} + \overline{AE} = \overline{AF} \Leftrightarrow \overline{EF} = \overline{AF} - \overline{AE}$, temos que, a distância em metros, do vértice $D$ à parede do quarto, arredondado às centésimas, é:

$$\overline{EF} = \overline{AF} - \overline{AE} \approx 1{,}05 - 0{,}763 \approx 0{,}29 \text{ m}$$

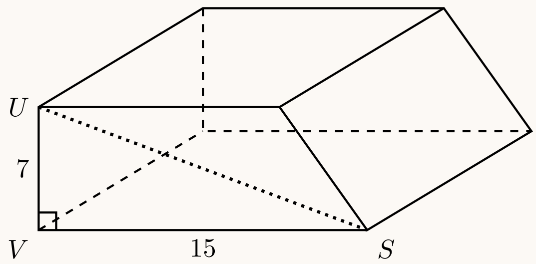
5.




5.1. Como os dois planos contêm o ponto $S$ e o ponto $X$ e não são coincidentes, a sua interseção é a reta $SX$

5.2. Como o triângulo $[UVS]$ é um triângulo retângulo em $V$, podemos, recorrer ao Teorema de Pitágoras, e afirmar que:

$$\overline{US}^2 = \overline{UV}^2 + \overline{VS}^2$$




Como $[SXWV]$ é um quadrado cujos lados têm 15 cm de comprimento, temos que $\overline{VS} = 15$ cm

Logo, como $\overline{UV} = 15$ cm, vem que:

$$\overline{US}^2 = 7^2 + 15^2 \Leftrightarrow \overline{US}^2 = 49 + 225 \Leftrightarrow \overline{US}^2 = 274 \underset{\overline{US}>0}{\Rightarrow} \overline{US} = \sqrt{274} \text{ cm}$$

Assim, como $\sqrt{274} \approx 16{,}6$, o valor de $\overline{US}$ arredondado às décimas é 16,6 cm

5.3. Considerando o trapézio $[STUV]$ como a base do prisma e a medida $\overline{VW}$ como a altura do prisma, substituindo os valores conhecidos, calculamos $\overline{UT}$, em centímetros, arredondado às décimas:

$$V_{[STUVWXYZ]} = A_{[STUV]} \times \overline{VW} \Leftrightarrow V_{[STUVWXYZ]} = \frac{\overline{VS} + \overline{UT}}{2} \times \overline{UV} \times \overline{VW} \Leftrightarrow$$

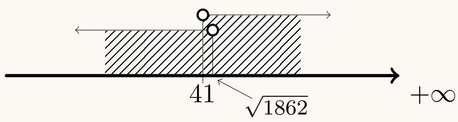
$$\Leftrightarrow 1250 = \frac{15 + \overline{UT}}{2} \times 7 \times 15 \Leftrightarrow \frac{1250 \times 2}{7 \times 15} = 15 + \overline{UT} \Leftrightarrow \frac{2500}{105} - 15 = \overline{UT} \Rightarrow \overline{UT} \approx 8{,}8 \text{ cm}$$

6. Para que $]-\infty, \sqrt{n}[ \cup ]41, +\infty[ = \mathbb{R}$, tem que se verificar $\sqrt{n} > 41$

Como $41^2 = 1681$, temos que:

- $\sqrt{1681} = 41$ $(\sqrt{1681} \not> 41)$
- $\sqrt{1682} > 41$ $(\sqrt{1682} \approx 41{,}01)$

Ou seja o menor valor natural para $n$ é o 1682.




**Caderno 2**

7.

7.1. Recorrendo à Regra de Laplace, e verificando que, existem 6 grupos, ou seja, 6 casos possíveis; e que o Daniel está integrado apenas em um deles, ou seja, 1 caso favorável, temos que a probabilidade, escrita na forma de fração, é:

$$p = \frac{1}{6}$$

7.2. Como os dois grupos são sorteados de entre um conjunto de 5, podemos organizar todas os pares de grupos que é possível sortear com recurso a uma tabela:

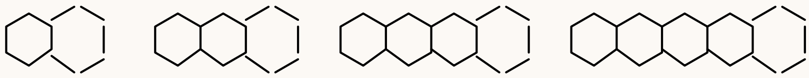
| | Grupo 1 | Grupo 2 | Grupo 3 | Grupo 4 | Grupo 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Grupo 1 | – | 1 e 2 | 1 e 3 | 1 e 4 | 1 e 5 |
| Grupo 2 | – | – | 2 e 3 | 2 e 4 | 2 e 5 |
| Grupo 3 | – | – | – | 3 e 4 | 3 e 5 |
| Grupo 4 | – | – | – | – | 4 e 5 |

Assim, podemos observar que existem 10 pares diferentes de grupos que podem ser sorteados, dos quais apenas 4 incluem o grupo 1, ou seja, calculando a probabilidade pela Regra de Laplace, e apresentado o resultado na forma de fração, temos:

$$p = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

8. Considerando que o primeiro termo é constituído por um hexágono completo (6 segmentos de reta) e mais 5 segmentos de reta, e que em cada termo são adicionados 5 segmentos de reta, o termo de ordem $n$ terá um total de 6 segmentos de reta, mais $5 \times n$ segmentos adicionados, ou seja, um total de:

$$6 + \underbrace{5 + 5 + \ldots + 5}_{n \text{ vezes}} = 6 + 5 \times n = 5n + 6 \text{ segmentos}$$



1º termo  2º termo  3º termo  4º termo

Resposta: **Opção C**

9. Como a reta $r$ contém os pontos de coordenadas $(-4{,}6)$ e $(2{,}3)$, então podemos calcular o valor do declive:

$$m_r = \frac{6-3}{-4-2} = \frac{3}{-6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

Assim, temos que uma equação da reta $r$ é da forma:

$$y = -\frac{1}{2}x + b$$

Substituindo as coordenadas de um ponto da reta $r$, por exemplo $(2{,}3)$, podemos determinar o valor da ordenada da origem ($b$):

$$3 = -\frac{1}{2} \times 2 + b \Leftrightarrow 3 = -1 + b \Leftrightarrow 3 + 1 = b \Leftrightarrow 4 = b$$

E assim, temos que uma equação da reta $r$ é:

$$y = -\frac{1}{2}x + 4$$

10. Fazendo o desenvolvimento do caso notável vem:

$$(x-4)^2 = x^2 - 2 \times 4 \times x + 4^2 = x^2 - 8x + 16$$

Resposta: **Opção A**

11. Como a equação está escrita na fórmula canónica, usando a fórmula resolvente para resolver a equação, e escrevendo as soluções na forma de fração irredutível, temos:

$(a = 15,\ b = -2 \text{ e } c = -1)$

$$15x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(15)(-1)}}{2(15)} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{30} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{30} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2+8}{30} \vee x = \frac{2-8}{30} \Leftrightarrow x = \frac{10}{30} \vee x = \frac{-6}{30} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \vee x = -\frac{1}{5}$$

C.S.$=\left\{-\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right\}$

12. Resolvendo a inequação, temos:

$$\frac{2(1-x)}{3} < \frac{1}{2}x + 2 \Leftrightarrow \frac{2-2x}{3}_{(2)} < \frac{x}{2}_{(3)} + \frac{2}{1}_{(6)} \Leftrightarrow \frac{4-4x}{6} < \frac{3x}{6} + \frac{12}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 - 4x < 3x + 12 \Leftrightarrow -4x - 3x < 12 - 4 \Leftrightarrow -7x < 8 \Leftrightarrow 7x > -8 \Leftrightarrow x > -\frac{8}{7}$$

C.S.$=\left]-\frac{8}{7}, +\infty\right[$

13. Como o ponto $P$ tem abcissa 3 e pertence ao gráfico da função $f$, temos que a sua ordenada é a imagem do objeto 3 pela função $f$, ou seja:

$$y_P = f(3) = \frac{4}{3} \times 3^2 = \frac{4}{3} \times 3 \times 3 = 4 \times 3 = 12$$

Assim temos que as coordenadas do ponto $P$ são (3,12), e como o ponto $P$ também pertence ao gráfico da função $g$, substituindo as coordenadas na expressão algébrica da função podemos calcular o valor de $a$:

$$g(3) = 12 \Leftrightarrow \frac{a}{3} = 12 \Leftrightarrow a = 12 \times 3 \Leftrightarrow a = 36$$

14. Usando as regras operatórias de potências e escrevendo o resultado na forma de uma potência de base $\frac{1}{8}$, temos que:

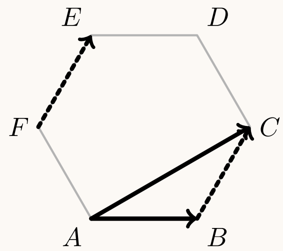
$$\frac{\left(4^5\right)^2}{4^{15}} \times 2^{-5} = \frac{4^{5\times 2}}{4^{15}} \times 2^{-5} = \frac{4^{10}}{4^{15}} \times 2^{-5} = 4^{10-15} \times 2^{-5} = 4^{-5} \times 2^{-5} = (4 \times 2)^{-5} = 8^{-5} = \left(\frac{1}{8}\right)^5$$

15. Como $x$ é o número de alunos do 2º ciclo e $y$ é o número de alunos do 3º ciclo que participaram na visita de estudo, e o número de alunos do 2º ciclo foi o triplo do número de alunos do 3º ciclo, temos que $x = 3y$

Por outro lado, como cada aluno do 2º ciclo pagou 9 euros, o custo destes bilhetes foi de $9x$. Da mesma forma, como cada aluno do 3º ciclo pagou 12 euros, o custo destes bilhetes foi de $12y$
E assim, como no total os bilhetes custaram 507 euros, temos que $9x + 12y = 507$

Assim, um sistema de equações que permita determinar o número de alunos do 2.º ciclo e o número de alunos do 3.º ciclo que participaram na visita de estudo, é:

$$\begin{cases} x = 3y \\ \\ 9x + 12y = 507 \end{cases}$$




16. Observando que $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BC}$ (porque são vetores com a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento), então temos que:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Resposta: **Opção D**

17. Como o ângulo $ABD$ é o ângulo inscrito relativo ao arco $AD$, a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco, ou seja:

$$A\hat{B}D = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} = \frac{56}{2} = 28°$$

Como os ângulos $OEB$ e $BEC$ são Ângulos suplementares e $B\hat{E}C = 72°$, temos que:

$$O\hat{E}B + B\hat{E}C = 180 \Leftrightarrow O\hat{E}B + 72 = 180 \Leftrightarrow O\hat{E}B = 180 - 72 \Leftrightarrow O\hat{E}B = 108°$$

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, e $A\hat{B}D = O\hat{B}E$ vem que:

$$O\hat{B}E + O\hat{E}B + B\hat{O}E = 180 \Leftrightarrow 28 + 108 + B\hat{O}E = 180 \Leftrightarrow B\hat{O}E = 180 - 108 - 28 \Leftrightarrow B\hat{O}E = 44°$$

18. Como os triângulos $[ABI]$ e $[CDI]$ têm dois pares de ângulos iguais (os ângulos $DCI$ e $ABI$ são ângulos alternos internos, e os ângulos $CID$ e $BIA$ são ângulos verticalmente opostos), pelo critério AA, os triângulos são semelhantes.

Como os lados $[AB]$ e $[CD]$ são correspondentes, porque se opõem a ângulos iguais, e também os lados $[IA]$ e $[ID]$ são correspondentes, porque também se opõem a ângulos iguais, e assim temos que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{IA}}{\overline{ID}}$$

Resposta: **Opção C**