Prova final de Matemática - 3.º ciclo (2017, Época especial)

Proposta de resolução

Caderno 1

1. Como $3\pi \approx 9{,}4247$ então vem que $9{,}42 < 3\pi < 9{,}43$, pelo que, de entre as opções apresentadas, o número 9,43 é a única aproximação de 3π com erro inferior a 0,01, ou seja: $3\pi - 9{,}43 < 0{,}01$

   Resposta: **Opção C**

2. Considerando a idade do Universo como 14 000 milhões de anos, e que a vida surgiu na terra há 3 600 milhões de anos, ou seja, pelo que podemos calcular quanto tempo depois da formação do Universo é que surgiu a vida na Terra como a diferença entre os dois valores anteriores:

$$14\,000 - 3\,600 = 10\,400 \text{ milhões de anos}$$

   Assim, escrevendo o valor anterior em anos e em notação científica, vem:

$$10\,400 \times 1\,000\,000 = 10\,400\,000\,000 = 1{,}04 \times 10^{10} \text{ anos}$$

   Ou seja, a vida surgiu na Terra $1{,}04 \times 10^{10}$ anos após a formação da Terra.

3. Como a água no reservatório ocupa o cilindro, cuja base é o círculo de diâmetro $\overline{BC}$ e a altura é $\overline{BP}$, vem que:

$$V_{\text{Água}} = \pi\left(\frac{\overline{BC}}{2}\right)^2 \times \overline{PB} \Leftrightarrow 50 = \pi\left(\frac{4{,}4}{2}\right)^2 \times \overline{PB} \Leftrightarrow 50 = \frac{\pi \times 4{,}4^2}{4} \times \overline{PB} \Leftrightarrow \frac{50 \times 4}{\pi \times 4{,}4^2} = \overline{PB} \Rightarrow \overline{PB} \approx 3{,}29\text{m}$$

   Assim, como a semiesfera tem raio igual ao cilindro, vem que a altura do reservatório, em metros, arredondado às unidades, é:

$$a = \frac{\overline{BC}}{2} + \overline{AP} + \overline{PB} \approx \frac{4{,}4}{2} + 1{,}5 + 3{,}29 \approx 7 \text{ m}$$

4. Como o ponto N é o pé da perpendicular traçada do ponto M para a reta OP, então o triângulo $[MNO]$ é retângulo em N e, relativamente ao ângulo MON, o lado $[ON]$ é o cateto adjacente e o lado $[OM]$ é a hipotenusa, pelo que, usando a definição de cosseno, temos:

$$\cos M\hat{O}N = \frac{\overline{ON}}{\overline{OM}} \Leftrightarrow \cos 56^\circ = \frac{\overline{ON}}{2} \Leftrightarrow \overline{ON} = 2\cos 56^\circ$$

Como $\cos 56^\circ \approx 0{,}559$, vem que:

$$\overline{ON} \approx 2 \times 0{,}559 \approx 1{,}118 \text{ m}$$

Assim, a distância da cadeira ao solo pode ser calculada como a diferenças das distâncias dos pontos O e N ao solo, ou seja, ao ponto P, e o seu valor em metros, arredondado às centésimas, é:

$$\overline{NP} = \overline{OP} - \overline{ON} \approx 2{,}5 - 1{,}118 \approx 1{,}38 \text{ m}$$

5.

5.1. Como o triângulo $[ACD]$ é retângulo em D, recorrendo ao Teorema de Pitágoras, o valor de $\overline{AC}$, em centímetros, é:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 1^2 + \left(\sqrt{8}\right)^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 1+8 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 9 \underset{\overline{AC}>0}{\Rightarrow} \overline{AC} = \sqrt{9} \Leftrightarrow \overline{AC} = 3\text{cm}$$

5.2. Como $[CD]$ é a altura do triângulo $[ABC]$ relativa ao lado $[AB]$ e o triângulo $[ABC]$ é retângulo então os triângulos $[ADC]$ e $[CDB]$ são semelhantes, ou seja, a razão entre lados correspondentes é igual, ou seja:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}$$

Desta forma, substituindo os valores conhecidos, vem que:

$$\frac{\overline{BD}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{8}}{1} \Leftrightarrow \overline{BD} = \frac{\sqrt{8} \times \sqrt{8}}{1} \Leftrightarrow \overline{BD} = \left(\sqrt{8}\right)^2 \Leftrightarrow \overline{BD} = 8$$

Assim, como os lado $[CD]$ e $[BD]$ do triângulo $[BCD]$ são perpendiculares, a área do triângulo em cm^2, arredondado às centésimas, é:

$$A_{[BCD]} = \frac{\overline{BD} \times \overline{CD}}{2} = \frac{8 \times \sqrt{8}}{2} = 4\sqrt{8} \approx 11{,}31 \text{ cm}^2$$

Caderno 2

6.

6.1. Observando que o número de rapazes da turma da Ana é $3+8+2 = 13$, e que existem 29 alunos na turma, calculando a probabilidade, com recurso à Regra de Laplace, de ser selecionado um rapaz e apresentado o resultado na forma de fração, temos:

$$p = \frac{13}{29}$$

6.2. Organizando as idades das 16 raparigas da turma da Ana numa lista ordenada, podemos verificar que os valores centrais são 15 e 16:

$$\underbrace{15\ \ldots\ 15}_{8}\ \underbrace{16\ 16\ 16\ 16\ 16\ 17\ 17\ 17}_{8}$$

Logo a mediana, $\tilde{x}$, das idades das raparigas da turma da Ana é:

$$\tilde{x} = \frac{15+16}{2} = \frac{31}{2} = 15{,}5 \text{ anos}$$

Resposta: **Opção B**

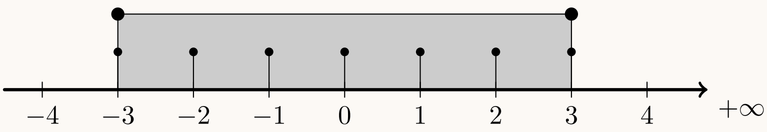
7. Podemos organizar todas os pares de escolhas da Diana e do Eduardo com recurso a uma tabela:

Eduardo \ **Diana**	Ponto A	Ponto B	Ponto C
Ponto A	$A\,A$	$B\,A$	$C\,A$
Ponto B	$A\,B$	$B\,B$	$C\,B$
Ponto C	$A\,C$	$B\,C$	$C\,C$

Assim, podemos observar que existem 9 pares de pontos que podem ser escolhidos, dos quais 7 são constituídos por pontos da mesma circunferência, ou seja, calculando a probabilidade pela Regra de Laplace, temos:

$$p = \frac{7}{9}$$

8. Como o conjunto $A \cap \mathbb{Z}$ tem sete elementos, os sete elemento são três pares de números inteiros simétricos e o zero, ou seja $A = [-3,3]$, e assim $A \cap \mathbb{Z} = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$, como se ilustra na representação seguinte:



Assim, para que o conjunto $[-n,n] \cap \mathbb{Z}$ tenha 7 elementos, o valor de n é 3

9. Como a função f é uma função de proporcionalidade inversa, então $f(x) = \frac{k}{x}, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Como $f(3) = 9$, e assim, temos que o valor da constante de proporcionalidade (k), pode ser calculado, substituindo as coordenadas do ponto na expressão algébrica da função f:

$$9 = \frac{k}{3} \Leftrightarrow 9 \times 3 = k \Leftrightarrow k = 27$$

Pelo que uma expressão que define a função f é: $f(x) = \frac{27}{x}$

Resposta: **Opção D**

10. Como o ponto B é o ponto do gráfico de f que tem abcissa 10, podemos determinar a ordenada:

$$y_B = \overline{AB} = f(10) = 3 \times 10^2 = 3 \times 100 = 300$$

Assim, considerando a base do triângulo $[OAB]$, o lado $[OA]$ e a altura o lado $[AB]$, podemos calcular a área do triângulo:

$$A_{[OAB]} = \frac{\overline{OA} \times \overline{AB}}{2} = \frac{10 \times 300}{2} = \frac{3000}{2} = 1500$$

Desta forma, a área da região não sombreada (A_{ns}) do triângulo pode ser calculada como a diferença da área total ($A_{[OAB]}$) e da área da região sombreada (A_s):

$$A_{ns} = A_{[OAB]} - A_s = 1500 - 1000 = 500$$

11. Como a equação está escrita na fórmula canónica, usando a fórmula resolvente para resolver a equação, temos:

($a = 2$, $b = 5$ e $c = -3$)

$$2x^2+5x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4(2)(-3)}}{2(2)} \Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{4} \Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{49}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-5+7}{4} \vee x=\frac{-5-7}{4} \Leftrightarrow x=\frac{2}{4} \vee x=\frac{-12}{4} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \vee x=-3$$

C.S.$=\left\{-3,\frac{1}{2}\right\}$

12. Resolvendo a inequação, temos:

$$\frac{2(3-x)}{3} \leq \frac{x}{2}+\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{6-2x}{3} \leq \frac{x}{2}+\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{6-2x}{3}_{(2)} \leq \frac{x}{2}_{(3)}+\frac{2}{3}_{(2)} \Leftrightarrow \frac{12-4x}{6} \leq \frac{3x}{6}+\frac{4}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12-4x \leq 3x+4 \Leftrightarrow -4x-3x \leq 4-12 \Leftrightarrow -7x \leq -8 \Leftrightarrow 7x \geq 8 \Leftrightarrow x \geq \frac{8}{7}$$

C.S.$=\left[\frac{8}{7},+\infty\right[$

13. Para que o par ordenado (1,1) seja a solução do sistema, o valor de a pode ser calculado, substituindo estes valores de x e de y na equação $ax+y=3$:

$$a(1)+1=3 \Leftrightarrow a=3-1 \Leftrightarrow a=2$$

Da mesma forma o valor de b pode ser calculado, substituindo estes valores de x e de y na equação $2x+by=5$:

$$2(1)+b(1)=5 \Leftrightarrow 2+b=5 \Leftrightarrow b=5-2 \Leftrightarrow b=3$$

Ou seja, se o par ordenado (1,1) é a solução do sistema, então $a=2$ e $b=3$

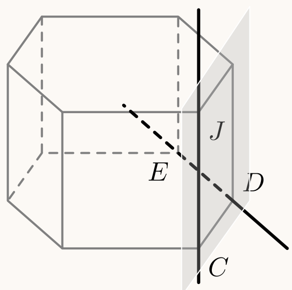
Resposta: **Opção B**

14. Usando as regras operatórias de potências e escrevendo o resultado na forma de uma potência de base 2, temos que:

$$\left(10^4\right)^3\times 10^2\times 5^{-14}=10^{4\times 3}\times 10^2\times\frac{1}{5^{14}}=10^{12}\times 10^2\times\frac{1}{5^{14}}=\frac{10^{12+2}}{5^{14}}=\frac{10^{14}}{5^{14}}=\left(\frac{10}{5}\right)^{14}=2^{14}$$

15.

15.1. As retas JC e ED não são complanares, porque os pontos J, C e D pertencem à mesma face do prima, ou seja, ao mesmo plano, mas o ponto E não pertence ao mesmo plano, ou seja ao plano JCD (como se pretende ilustrar na figura ao lado).



Resposta: **Opção A**

15.2. Como as arestas do prisma são todas geometricamente iguais, $\overline{CJ} = \overline{BC} = x - 3$, e assim, vem que a área da face lateral $[BCJI]$ é:

$$A_{[BCJI]} = \overline{CJ} \times \overline{BC} = (x-3)(x-3) = x^2 - 3x - 3x + (-3)(-3) = x^2 - 6x + 9$$

Resposta: **Opção C**

16. Como o trapézio é isósceles, então $\overline{BC} = \overline{AD}$, pelo que também $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AD}$, e como $[CD]$ é um diâmetro, vem que:

$$\overset{\frown}{CD} = 180 \Leftrightarrow \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AD} = 180 \Leftrightarrow \overset{\frown}{BC} + 80 + \overset{\frown}{BC} = 180 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2 \times \overset{\frown}{BC} = 180 - 80 \Leftrightarrow \overset{\frown}{BC} = \frac{100}{2} \Leftrightarrow \overset{\frown}{BC} = 50^\circ$$

E assim, vem que:

$$B\overset{\frown}{C}D = \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} = 50 + 180 = 230^\circ$$

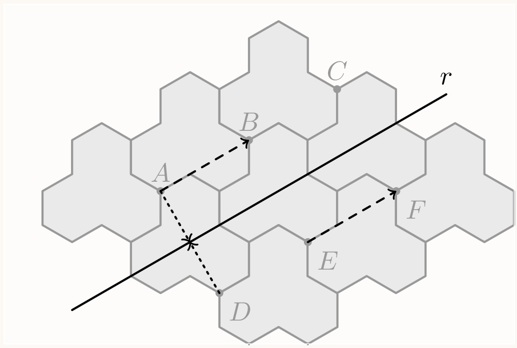
Como o ângulo DAB é o ângulo inscrito relativo ao arco BCD, a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco, ou seja:

$$D\hat{A}B = \frac{B\overset{\frown}{C}D}{2} = \frac{230}{2} = 115^\circ$$

17. Temos que:

- a reflexão do ponto D relativamente ao eixo r é o ponto A
- a translação do ponto A associada ao vetor $\overrightarrow{EF}$ é o ponto B

Assim, a imagem do ponto D pela reflexão deslizante de eixo r e vetor $\overrightarrow{EF}$, é o ponto B



18. Verificando que em cada termo:

- o número de cubos cinzentos é igual à ordem do termo, ou seja, existem n cubos cinzentos no termo de ordem n
- o número de cubos brancos é igual à diferença entre o número total de cubos (n^2) e o número de cubos cinzentos (n)

Então uma expressão que represente o número de cubos brancos do termo de ordem n da sucessão é:

$$n^2 - n$$