# Prova final de Matemática - 3.º ciclo **(2017, 2.ª fase)**

Proposta de resolução

## Caderno 1

1. Como no histograma estão representados todos os alunos a probabilidade de um aluno, escolhido ao acaso, ter uma massa corporal inferior a 45 kg, é exatamente a frequência relativa da classe $[40{,}45[$, ou seja, o valor de $k$

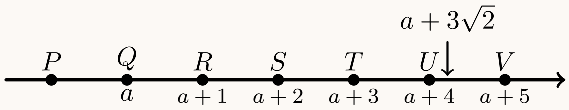
   Como a soma de todas as frequências relativas, em percentagem é 100 %, então podemos determinar o valor de $k$, resolvendo a equação seguinte:

   $$k + 17 + 24 + 29 + 22 = 100 \Leftrightarrow k + 92 = 100 \Leftrightarrow k = 100 - 92 \Leftrightarrow k = 8$$

   Resposta: **Opção C**

2. Como $3\sqrt{2} \approx 4{,}24$, ou seja, $4 < 3\sqrt{2} < 5$ e a distância entre cada dois pontos consecutivos é 1, entãoo ponto de abcissa $a + 3\sqrt{2}$ está situado entre os pontos $U$ e $V$, porque:

   $$4 < 3\sqrt{2} < 5 \Rightarrow a + 4 < a + 3\sqrt{2} < a + 5$$

   Resposta: $[UV]$

3. Como a distância média da Terra ao Sol é igual a 149,6 milhões de quilómetros, ou seja:

   $$149{,}6 \times 1\,000\,000 = 149\,600{,}000 = 1{,}496 \times 10^8 \text{ km}$$

   Então podemos calcular a distância média de Neptuno ao Sol, em quilómetros, multiplicando a distância anterior por 30. Fazendo o cálculo e escrevendo o resultado em notação científica, temos:

   $$1{,}496 \times 10^8 \times 30 = 1{,}496 \times 30 \times 10^8 = 44{,}88 \times 10^8 = 4{,}488 \times 10^9 \text{ km}$$

4. Como o triângulo é retângulo, recorrendo ao Teorema de Pitágoras, e substituindo os comprimentos dos catetos, calculando o comprimento da hipotenusa ($h$) e arredondando o resultado às centésimas, vem:

$$h^2 = 48^2 + 62^2 \Leftrightarrow h^2 = 2304 + 3844 \Leftrightarrow h^2 = 6148 \underset{h>0}{\Rightarrow} h = \sqrt{6148} \Rightarrow h \approx 78{,}41$$

5. Como os triângulos $[ABH]$ e $[GEF]$ são ambos retângulos, $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $B\hat{A}H = E\hat{G}F$, pelo critério ALA os triângulos são congruentes e, por isso $\overline{BH} = \overline{EF}$
Temos ainda que:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{AD} \Leftrightarrow 2\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AD} \Leftrightarrow 2\overline{AB} = \overline{AD} - \overline{BC} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{\overline{AD} - \overline{BC}}{2}$$

Assim, como $\overline{AB} = \overline{GE}$, temos que:

$$\overline{GE} = \overline{AB} = \frac{23 - 12}{2} = \frac{11}{2} = 5{,}5 \text{ m}$$

Como, relativamente ao ângulo $EGF$, o lado $[GE]$ é o cateto adjacente e o lado $[FE]$ é o cateto oposto, usando a definição de tangente, temos:

$$\operatorname{tg} E\hat{G}F = \frac{\overline{FE}}{\overline{GE}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\overline{FE}}{5{,}5} \Leftrightarrow \overline{FE} = \operatorname{tg} 30^\circ \times 5{,}5$$

Como $\operatorname{tg} 30^\circ \approx 0{,}577$, vem que:

$$\overline{FE} \approx 0{,}577 \times 5{,}5 \approx 3{,}174 \text{ m}$$

Como $\overline{FD} = \overline{FE} + \overline{ED} = 2\overline{FE}$, então a distância da superfície do rés do chão à superfície do 2.º andar, arredondada às centésimas, é:

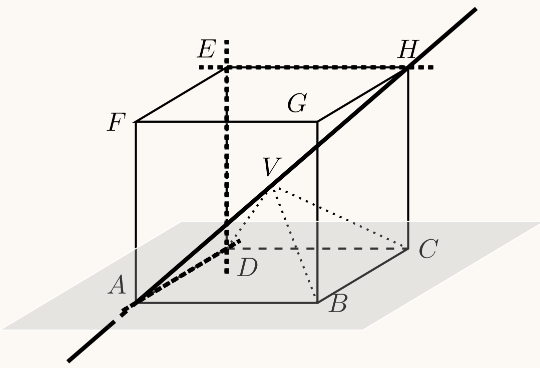
$$\overline{FD} \approx 2 \times 3{,}174 \approx 6{,}35 \text{ m}$$

6.

6.1. Verificando que as retas $AD$, $EH$ e $ED$ contêm arestas do cubo, então, respetivamente, pertencem, são paralelas ou são perpendiculares ao plano que contém a face $[ABCD]$ do cubo.

Assim, a reta $AH$, que contém uma diagonal do cubo, interseta as seis faces do cubo sem ser perpendicular a nenhum deles, em particular é secante e não perpendicular ao plano que contém a face $[ABCD]$

Resposta: **Opção A**




6.2. Como o volume do cubo é 729 cm$^3$, então a medida da aresta é:

$$\overline{AB} = \sqrt[3]{729} = 9 \text{ cm}$$

Como o vértice $V$ coincide com o centro do cubo, a altura da pirâmide é metade da aresta do cubo, e assim, o volume da pirâmide $[ABCDV]$ é:

$$V_{[ABCDV]} = \frac{A_{[ABCD]} \times \text{altura}}{3} = \frac{\overline{AB}^2 \times \frac{\overline{AB}}{2}}{3} = \frac{9^2 \times \frac{9}{2}}{3} = \frac{81 \times 9}{6} = 121{,}5 \text{ cm}^3$$

## Caderno 2

7. Como os dois alunos são sorteados simultaneamente, podemos organizar todas os pares de alunos que é possível sortear com recurso a uma tabela:

| | Rapariga $M_1$ | Rapariga $M_2$ | Rapaz $H_1$ | Rapaz $H_2$ |
|---|---|---|---|---|
| Rapariga $M_1$ | – | $M_1M_2$ | $M_1H_1$ | $M_1H_2$ |
| Rapariga $M_2$ | – | – | $M_2H_1$ | $M_2H_2$ |
| Rapaz $H_1$ | – | – | – | $H_1H_2$ |

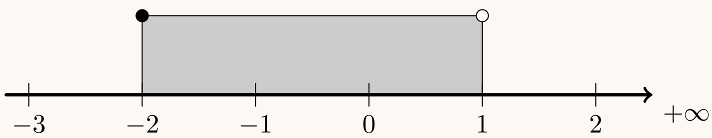
Assim, podemos observar que existem 6 pares diferentes que podem ser sorteados, dos quais 4 são constituídos por um rapaz e uma rapariga, ou seja, calculando a probabilidade pela Regra de Laplace, e apresentado o resultado na forma de fração, temos:

$$p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

8. Pela observação do diagrama de extremos e quartis, podemos identificar o primeiro e o terceiro quartis: $Q_1 = 4$ e $Q_3 = 7$
E assim a amplitude interquartis é:

$$A = Q_3 - Q_1 = 7 - 4 = 3$$

9. Representando na reta real o conjunto $[-2{,}1[$, temos:




Assim, podemos verificar que, como o intervalo é aberto no limite superior, $1 \notin [-2{,}1[$, e assim vem que:

$$X = [-2{,}1[ \cap \mathbb{Z} = \{-2, -1{,}0\}$$

Resposta: **Opção B**

10. A abcissa do ponto $B$ é 2, a abcissa do ponto $A$ é 4 e, como o triângulo $[OAB]$ é isósceles, ($\overline{OB} = \overline{AB}$) então a altura relativamente ao lado $[OA]$ pertence à bissetriz deste lado.
Como o ponto $B$ é o ponto do gráfico de $f$ que tem abcissa 2, podemos calcular a sua ordenada ($y_B$), recorrendo à expressão algébrica da função $f$:

$$y_B = f(2) = 4(2)^2 = 4 \times 4 = 16$$

Assim, temos que a área do triângulo $[OAB]$ é:

$$A_{[OAB]} = \frac{\overline{OA} \times f(2)}{2} = \frac{x_A \times y_B}{2} = \frac{4 \times 16}{2} = \frac{64}{2} = 32$$

11. A representação gráfica de uma função de proporcionalidade inversa é parte de uma hipérbole que não interseta o eixo das ordenadas.
Assim, de entre as opções apresentadas, a única representação gráfica que não interseta o eixo $Oy$ é a da opção (D)

Resposta: **Opção D**

12. Como o termo geral da sucessão é $b^n$ e a sucessão tem valores alternadamente negativos e positivos, então $b < 0$

Como o valor absoluto dos termos da sucessão são potências de 2, ou seja, os valores da sucessão $b^n$, temos que:

$$b = -2$$

13. Como a equação está escrita na fórmula canónica, usando a fórmula resolvente para resolver a equação e escrevendo as soluções na forma de fração irredutível, temos:

($a = 10$, $b = -3$ e $c = -1$)

$$10x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(10)(-1)}}{2(10)} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{20} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{20} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3+7}{20} \vee x = \frac{3-7}{20} \Leftrightarrow x = \frac{10}{20} \vee x = \frac{-4}{20} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{5}$$

C.S.$=\left\{-\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right\}$

14. Resolvendo a inequação, temos:

$$\frac{x+3}{5} > 2(x-1) \Leftrightarrow \frac{x+3}{5} > 2x-2 \Leftrightarrow \frac{x+3}{5} > \frac{2x}{1}_{(5)} - \frac{2}{1}_{(5)} \Leftrightarrow \frac{x+3}{5} > \frac{10x}{5} - \frac{10}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+3 > 10x - 10 \Leftrightarrow x - 10x > -10 - 3 \Leftrightarrow -9x > -13 \Leftrightarrow 9x < 13 \Leftrightarrow x < \frac{13}{9}$$

C.S.$=\left]-\infty,\frac{13}{9}\right[$

15. Podemos substituir as soluções no sistema, para identificar qual delas verifica as duas equações do sistema simultaneamente, ou então, resolver o sistema para encontrar a solução:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 2y = 3 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 3 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{3} \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

C.S. $= \{(1,1)\}$

Resposta: **Opção B**

16. Usando as regras operatórias de potências e escrevendo o resultado na forma de uma potência de base 4, temos que:

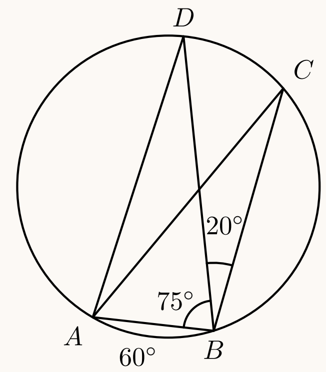
$$\left(12^3\right)^2 \times 12^3 \times 3^{-9} = 12^{3\times 2} \times 12^3 \times \frac{1}{3^9} = 12^6 \times 12^3 \times \frac{1}{3^9} = 12^{6+3} \times \frac{1}{3^9} = 12^9 \times \frac{1}{3^9} = \frac{12^9}{3^9} = \left(\frac{12}{3}\right)^9 = 4^9$$

17. Como a área do triângulo é o produto dos comprimentos de dois lados adjacentes, escrevendo e simplificando a expressão da área, temos que:

$$A = x \times (x+3) = x^2 + 3x$$

18. Como o ângulo $BDA$ é o ângulo inscrito relativo ao arco $AB$, a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco, ou seja:

$$B\hat{D}A = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{60}{2} = 30°$$




Como, num triângulo a lados iguais se opõem ângulos com a mesma amplitude e $\overline{AD} = \overline{BD}$ então $D\hat{B}A = B\hat{A}D$, e como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, vem que:

$$D\hat{B}A + B\hat{A}D + B\hat{D}A = 180 \Leftrightarrow D\hat{B}A + D\hat{B}A + 30 = 180 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\,D\hat{B}A = 180 - 30 \Leftrightarrow D\hat{B}A = \frac{150}{2} \Leftrightarrow D\hat{B}A = 75°$$

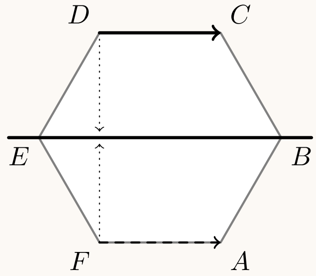
Desta forma, como $C\hat{B}D = 20°$, vem que:

$$A\hat{B}C = D\hat{B}A + C\hat{B}D = 75 + 20 = 95°$$

19. Temos que:
    - a reflexão do ponto $F$ relativamente ao eixo $EB$ é o ponto $D$
    - a translação do ponto $D$ associada ao vetor $\overrightarrow{FA}$ é o ponto $C$

    Assim, a imagem do ponto $F$ pela reflexão deslizante de eixo $EB$ e vetor $\overrightarrow{FA}$, é o ponto $C$

    Resposta: **Opção C**




20. Dois planos, ambos perpendiculares a um terceiro plano, não são necessariamente perpendiculares entre si.

    Assim, temos que:
    - o plano $AFE$ é perpendicular ao plano $ABC$ (porque contém faces adjacentes do cubo)
    - o plano $BDE$ também é perpendicular ao plano $ABC$ (porque contém faces adjacentes do cubo)

    Mas, como o ângulo $ADB$ não é reto, os planos $AFE$ e $BDE$, não são perpendiculares entre si.