Prova final de Matemática - 3.º ciclo **(2016, Época especial)**

Proposta de resolução

Caderno 1

---

1. Como os triângulos $[OAB]$ e $[OCD]$ são semelhantes (porque têm um ângulo comum e os lados opostos a este ângulo - os lados $[AB]$ e $[CD]$ são paralelos), a razão entre lados correspondentes é igual, ou seja:

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$$

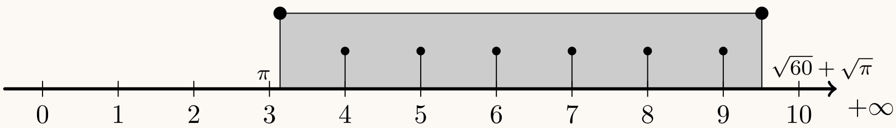
Desta forma, substituindo os valores conhecidos, vem que:

$$\frac{\overline{OC}}{9{,}8} = \frac{8{,}4}{5{,}6} \Leftrightarrow \overline{OC} = \frac{8{,}4 \times 9{,}8}{5{,}6} \Leftrightarrow \overline{OD} = 14{,}7 \text{ cm}$$

Como $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} \Leftrightarrow \overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA}$, calculando o valor de $\overline{AC}$, em centímetros, vem:

$$\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = 14{,}7 - 9{,}8 = 4{,}9 \text{ cm}$$

2. Como $\pi \approx 3{,}14$ e $\sqrt{60} + \sqrt{\pi} \approx 9{,}51$, representando na reta real o intervalo $\left[\pi, \sqrt{60} + \sqrt{\pi}\right]$, e os números naturais que pertencem a este conjunto, temos:



Assim, podemos verificar que o conjunto dos números naturais que pertencem ao intervalo $\left[\pi, \sqrt{60} + \sqrt{\pi}\right]$ é:

$$\{4,5,6,7,8,9\}$$

3. Como 1 litro tem 1000 mililitros, 1,5 litros corresponde a 1500 mililitros:

$$1{,}5 \text{ l} = 1500 \text{ ml}$$

Logo, como em cada mililitro existem 4,7 milhões de glóbulos brancos, em 1,5 litros existem:

$$4{,}7 \times 1500 = 7050 \text{ milhões de glóbulos brancos}$$

Escrevendo este número em notação científica, temos:

$$7\,050\,000\,000 = 7{,}05 \times 10^9$$

4. O triângulo $[AOP]$ é retângulo em P. Como, relativamente ao ângulo AOP, o lado $[OP]$ é o cateto adjacente e o lado $[AP]$ é o cateto oposto, usando a definição de tangente, temos:

$$\text{tg } A\hat{O}P = \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \text{tg } 55^\circ = \frac{225}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \overline{OP} = \frac{225}{\text{tg } 55^\circ}$$

Como $\text{tg } 55^\circ \approx 1{,}43$, vem que:

$$\overline{OP} \approx \frac{225}{1{,}43} \approx 157{,}34 \text{ m}$$

Como $\overline{OR} = \overline{OP} + \overline{PR}$, em centímetros, vem:

$$\overline{OR} \approx 157{,}34 + 132 \approx 289{,}34 \text{ m}$$

O triângulo $[BOR]$ é retângulo em R. Como, relativamente ao ângulo BOR, o lado $[OR]$ é o cateto adjacente e o lado $[BR]$ é o cateto oposto, voltando a usar a definição de tangente, temos:

$$\text{tg } B\hat{O}R = \frac{\overline{BR}}{\overline{OR}} \Rightarrow \text{tg } B\hat{O}R \approx \frac{225}{289{,}34} \Rightarrow \text{tg } B\hat{O}R \approx 0{,}78$$

Assim, procurando o valor mais próximo de 0,78 na coluna dos valores da tangente na tabela de valores das razões trigonométricas (ou recorrendo à calculadora), e arredondando a amplitude do ângulo BOR às unidades, temos que

$$B\hat{O}R \approx \text{tg}^{-1}(0{,}78) \approx 38^\circ$$

5.

5.1. Como a altura de um cone é perpendicular ao raio da base, o triângulo $[ACV]$ é retângulo em C. Logo podemos calcular $\overline{VC}$, recorrendo ao Teorema de Pitágoras:

$$\overline{VA}^2 = \overline{VC}^2 + \overline{AC}^2 \Leftrightarrow 15^2 = \overline{VC}^2 + 6^2 \Leftrightarrow 225 - 36 = \overline{VC}^2 \Leftrightarrow 189 = \overline{VC}^2 \underset{\overline{VC}>0}{\Rightarrow} \overline{VC} = \sqrt{189}$$

Assim, o volume do cone é:

$$V_{\text{cone}} = \frac{\text{Área da base} \times \text{altura}}{3} = \frac{\pi \times \overline{AC}^2 \times \overline{VC}}{3} = \frac{\pi \times 6^2 \times \sqrt{189}}{3} \approx 518{,}277 \text{ cm}^3$$

O volume da semiesfera é:

$$V_{\text{semiesfera}} = \frac{V_{\text{esfera}}}{2} = \frac{\frac{4}{3}\pi \times \overline{AC}^3}{2} = \frac{4\pi \times 6^3}{6} \approx 452{,}389 \text{ cm}^3$$

Assim, o volume do sólido pode ser calculado como a soma dos volumes do cone e da semiesfera, pelo que, fazendo os cálculos e arredondando o resultado às unidades, vem:

$$V = V_{\text{cone}} + V_{\text{semiesfera}} \approx 518{,}277 + 452{,}389 \approx 971 \text{ cm}^3$$

5.2. Como a superfície esférica tem centro no ponto V e contém o ponto A, então $[VA]$ é um raio da superfície esférica, e assim, temos que:

$$r = \overline{VA} = 15 \text{ cm}$$

Resposta: **Opção D**

6. Como se trata de uma função de proporcionalidade inversa, a sua expressão algébrica é da forma

$$y = \frac{k}{x}, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Assim, substituindo as coordenadas do ponto $(4{,}8;30)$ (que pertence ao gráfico da função), podemos calcular o valor de k:

$$30 = \frac{k}{4{,}8} \Leftrightarrow 30 \times 4{,}8 = k \Leftrightarrow 144 = k$$

Como o ponto $(a{,}a)$ também pertence ao gráfico da função, temos que:

$$a = \frac{144}{a} \Leftrightarrow a \times a = 144 \Leftrightarrow a^2 = 144 \underset{a>0}{\Rightarrow} a = \sqrt{144} \Leftrightarrow a = 12$$

7. Como os dados se reportam a um grupo de 20 pessoas, dividindo a lista ordenada em duas listas com 10 pessoas cada, podemos determinar os quartis.

$$\overbrace{\underbrace{8 \quad 8 \quad 12 \quad 12 \quad 12}_{5} \quad \underbrace{18 \quad 18 \quad 18 \quad 18 \quad 24}_{5}}^{10} \quad \overbrace{\underbrace{24 \quad 24 \quad 24 \quad 24 \quad 24}_{5} \quad \underbrace{32 \quad 32 \quad 32 \quad 32 \quad 32}_{5}}^{10}$$

Assim, a mediana corresponde à média das idades correspondentes às posições 10 e 11 da lista ordenada, o primeiro quartil à média das idades correspondentes às posições 5 e 6, e o terceiro quartil à média das idades das posições 15 e 16:

$$\tilde{x} = \frac{24+24}{2} = 24 \qquad Q_1 = \frac{12+18}{2} = \frac{30}{2} = 15 \qquad Q_3 = \frac{24+32}{2} = \frac{56}{2} = 28$$

Resposta: **Opção C**

8.

8.1. Recorrendo à Regra de Laplace, e verificando que, no saco da Luísa existe 1 caso favorável (a bola com um número par - o número 2) e 3 casos possíveis (as três bolas do saco), temos que a probabilidade, escrita na forma de fração, é:

$$p = \frac{1}{3}$$

8.2. Como a Luísa retirou duas bolas e verificou que o produto dos números das bolas era um número ímpar, então as bolas retiradas tinham os números 3 e 5 (porque se alguma das bolas tivesse o número 2, então o produto seria um número par - 6 ou 10).
Logo o produto dos números das bolas retiradas pela Luísa é 15, e assim, recorrendo à Regra de Laplace, e verificando que, no saco do Pedro existem 2 casos favoráveis (as bolas com os números 20 e 30 - o número 2) e 3 casos possíveis (as três bolas do saco), temos que a probabilidade, escrita na forma de fração, é:

$$p = \frac{2}{3}$$

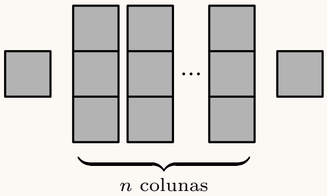
9. Como o ponto O é a origem da reta e a abcissa do ponto A é $-\sqrt{5}$, então $\overline{OA} = \sqrt{5}$, e o diâmetro da circunferência é:

$$d = 2 \times \overline{OA} = 2\sqrt{5}$$

Resposta: **Opção B**

10. Considerando cada termo da sequência constituído por:
    - um quadrado à esquerda
    - um conjunto de quadrados na zona central, e verificando que a zona central tem n colunas com 3 quadrados cada
    - um quadrado à direita

    temos que no termo de ordem n, existem 2 quadrados nos extremos e mais n colunas com 3 quadrados, ou seja:



$$2 + n \times 3 = 3n + 2 \text{ quadrados}$$

Resposta: **Opção D**

11. Como retas paralelas têm o mesmo declive, o declive da reta s, é igual ao declive da reta r, ou seja:

$$m_s = m_r = -2$$

Assim, temos que a equação da reta s é da forma:

$$y = -2x + b$$

Substituindo as coordenadas de um ponto da reta s $((-3,2))$, podemos determinar o valor da ordenada da origem (b):

$$2 = -2 \times (-3) + b \Leftrightarrow 2 = 6 + b \Leftrightarrow 2 - 6 = b \Leftrightarrow -4 = b$$

E assim, temos que a equação da reta s é:

$$y = -2x - 4$$

12. Usando as regras operatórias de potências e escrevendo o resultado na forma de uma potência de base 2, temos que:

$$\frac{4^{17}}{2^{17}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-20} = \left(\frac{4}{2}\right)^{17} \times \frac{1^{-20}}{2^{-20}} = 2^{17} \times \frac{1}{2^{-20}} = 2^{17} \times 2^{20} = 2^{17+20} = 2^{37}$$

13. Resolvendo o sistema, temos:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2(x+y) = -x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ 2x + 2y = -x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ 2x + 2y + x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ 3x + 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ 3x + 2(3-x) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ 3x + 6 - 2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ 3x - 2x = -1 - 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - (-7) \\ x = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 + 7 \\ x = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 \\ x = -7 \end{cases}$$

$C.S. = \{ (-7,10) \}$

14. Escrevendo a equação na fórmula canónica, usando a fórmula resolvente e apresentando as soluções na forma de fração irredutível, vem:

$$2x^2 = \frac{x+2}{3} \Leftrightarrow \frac{2x^2}{1}_{(3)} = \frac{x+2}{3} \Leftrightarrow \frac{6x^2}{3} = \frac{x+2}{3} \Leftrightarrow 6x^2 = x+2 \Leftrightarrow 6x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$(a = 6,\ b = -1 \text{ e } c = -2)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(6)(-2)}}{2(6)} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{12} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1+7}{12} \lor x = \frac{1-7}{12} \Leftrightarrow x = \frac{8}{12} \lor x = \frac{-6}{12} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \lor x = -\frac{1}{2}$$

C.S.$=\left\{-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right\}$

15. Resolvendo a inequação, temos:

$$-2x < 6 \Leftrightarrow 2x > -6 \Leftrightarrow x > \frac{-6}{2} \Leftrightarrow x > -3$$

C.S.$=]-3, +\infty[$

Resposta: **Opção A**

16. Fazendo o desenvolvimento do caso notável, e simplificando, vem:

$$(x+k)^2 = x^2 + 2 \times k \times x + k^2 = x^2 + 2kx + k^2$$

Assim, podemos determinar o valor de k:

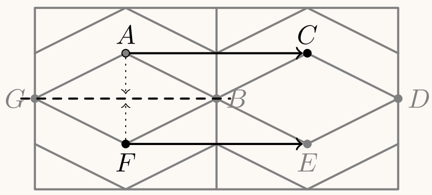
$$2k = -8 \land k^2 = 16 \Leftrightarrow k = -\frac{8}{2} \land k = \pm\sqrt{16} \Leftrightarrow k = -4 \land (k = 4 \lor k = -4) \Leftrightarrow k = -4$$

17. Como a reflexão do ponto F e eixo GB é o ponto A

E a imagem do ponto A pela translação associada ao vetor $\overrightarrow{FE}$, ou seja, ao vetor $\overrightarrow{AC}$, é o ponto C

então, a reflexão deslizante de eixo GB e vetor $\overrightarrow{FE}$ é:

o ponto C



18. Como o ângulo BDA é reto (porque está inscrito numa semicircunferência), então temos que:

$$B\hat{D}A = E\hat{D}A = 90^\circ$$

Assim, podemos determinar a amplitude do ângulo DAC (porque a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180°:

$$D\hat{A}C + A\hat{E}D + E\hat{D}A = 180 \Leftrightarrow D\hat{A}C + 70 + 90 = 180 \Leftrightarrow D\hat{A}C = 180 - 90 - 70 \Leftrightarrow D\hat{A}C = 20^\circ$$

Assim, como o ângulo DAC é o ângulo inscrito relativo ao arco DC, a amplitude do arco é o dobro da amplitude do ângulo. ou seja:

$$\overset{\frown}{DC} = 2 \times D\hat{A}C \Leftrightarrow \overset{\frown}{DC} = 2 \times 20 \Leftrightarrow \overset{\frown}{DC} = 40^\circ$$

19. Se os planos α e β são paralelos, todas as retas contidas no plano α são paralelas ao plano β

    Como os pontos P e Q pertencem ao plano α, então a reta PQ está contida no plano α, e por isso, é paralela ao plano β