Prova final de Matemática - 3.º ciclo **(2016, 2.ª fase)**

Proposta de resolução

Caderno 1

1. Calculando a diferença entre $\sqrt[3]{14}$ e cada uma das opções apresentadas, arredondada às centésimas, temos que:

   - $\sqrt[3]{14} - 2{,}2 \approx 0{,}21$
   - $\sqrt[3]{14} - 2{,}3 \approx 0{,}11$
   - $2{,}5 - \sqrt[3]{14} \approx 0{,}09$
   - $2{,}6 - \sqrt[3]{14} \approx 0{,}19$

   Desta forma temos que, de entre as opções apresentadas, a única aproximação com erro inferior a uma décima (0,1), de $\sqrt[3]{14}$, é 2,5

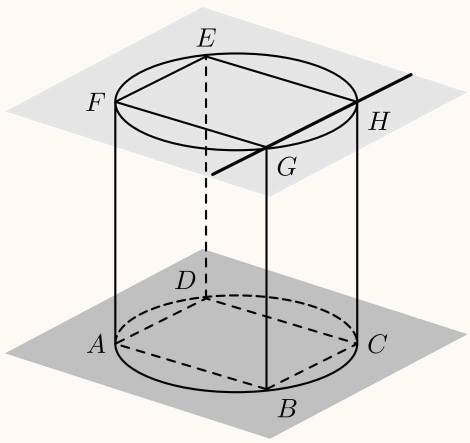
   Resposta: **Opção C**

2.

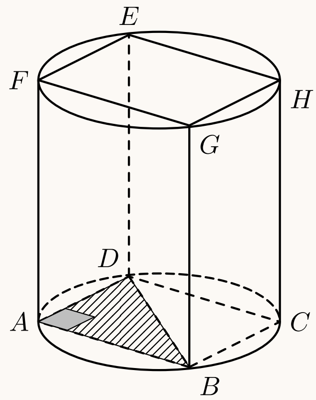
   2.1. Como as bases do prisma são paralelas, qualquer reta do plano que contém a base superior é paralela ao plano que contém a base inferior.

   Assim, uma reta paralela ao plano ABC (que contém a base $[ABCD]$), é, por exemplo:

   a reta GH



2.2. Como a base do prisma é um quadrado, os lados adjacentes são perpendiculares, pelo que o triângulo $[DAB]$ é retângulo em A



Como o raio da base do cilindro é igual a 3 cm, então a medida do diâmetro é:

$$\overline{BD} = 2 \times 3 = 6 \text{ cm}$$

Assim, recorrendo ao Teorema de Pitágoras, para calcular a medida do lado da base do prisma, $\overline{AB}$, temos:

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 \underset{\overline{AB}=\overline{AD}}{\Leftrightarrow} \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AB}^2 \Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 2 \times \overline{AB}^2$$

$$2 \times \overline{AB}^2 = 6^2 \Leftrightarrow 2 \times \overline{AB}^2 = 36 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = \frac{36}{2} \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 18 \text{ cm}^2$$

Assim, calculando o volume do prisma, em centímetros cúbicos, e arredondando o resultado às unidades, vem:

$$V_{[ABCDEFGH]} = \overline{AB}^2 \times \overline{BG} = 18 \times 5{,}3 \approx 95 \text{ cm}^3$$

2.3. Como planificação da superfície lateral de cilindro é um retângulo, cujas medidas dos lados são, respetivamente, o perímetro da base e a altura do cilindro, calculando o perímetro da base, temos:

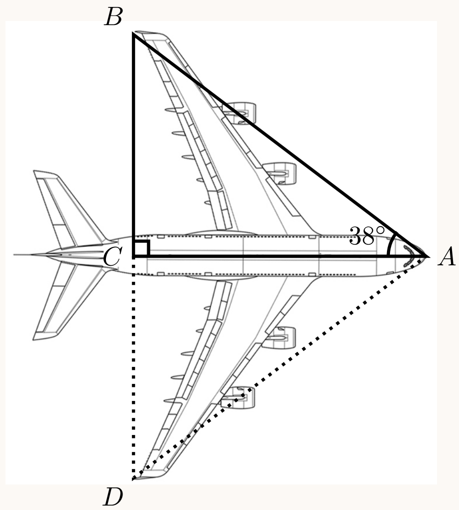
$$P_\circ = 2\pi r = 2 \times \pi \times 3 = 6\pi \text{ cm}$$

E assim, calculando a área da superfície lateral do cilindro, em centímetros quadrados e arredondando o resultado às unidades, temos:

$$A_{SL} = P_\circ \times \overline{BG} = 6\pi \times 5.3 \approx 100 \text{ cm}^2$$

3. Como o triângulo $[ABD]$ é isósceles e o segmento de reta $[AC]$ é a altura relativa à base $[BD]$, o triângulo $[ABC]$ é retângulo em C.

No triângulo $[ABC]$, relativamente ao ângulo BAD, o lado $[BC]$ é o cateto oposto e o lado $[AC]$ é o cateto adjacente, e como $B\hat{A}C = \frac{B\hat{A}D}{2} = \frac{76}{2} = 38°$, usando a definição de tangente, temos:



$$\text{tg } B\hat{A}C = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \text{tg } 38° = \frac{\overline{BC}}{51} \Leftrightarrow 51 \times \text{tg } 38° = \overline{BC}$$

Como tg $38° \approx 0{,}78$, vem que:

$$\overline{BC} \approx 51 \times 0{,}78 \approx 39{,}78 \text{ m}$$

Como o triângulo $[ABD]$ é isósceles e o segmento de reta $[AC]$ é a altura relativa à base $[BD]$, temos que $\overline{BC} = \overline{BC}$, e assim determinando a envergadura do A380, ou seja o valor de $\overline{BD}$, em metros, e arredondando o resultado às unidades, vem que:

$$\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} \approx 39{,}78 + 39{,}78 \approx 80 \text{ m}$$

4. Como a média do conjunto de dados é 60, podemos determinar o valor de k:

$$\frac{30+70+100+k}{4}=60 \Leftrightarrow \frac{200+k}{4}=60 \Leftrightarrow 200+k=60\times 4 \Leftrightarrow 200+k=240 \Leftrightarrow k=240-200 \Leftrightarrow k=40$$

Assim, na lista ordenada dos dados, os valores centrais, são 40 e 70.

$$\underbrace{30\ \ 40}_{50\%}\,\underbrace{70\ \ 100}_{50\%}$$

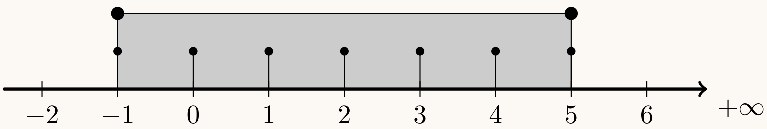
Logo a mediana, $\tilde{x}$, do conjunto de dados é

$$\tilde{x}=\frac{40+70}{2}=\frac{110}{2}=55$$

5. Determinar o menor número natural para o qual $\frac{n}{0,4}$ também é um número natural, pode ser conseguido, substituindo sucessivamente n por valores naturais:

- $n=1 \rightarrow \frac{1}{0,4}=2,5$
- $n=2 \rightarrow \frac{2}{0,4}=5$

Assim, o valor de n é 2 e, representando o intervalo $\left[-1;\frac{2}{0,4}\right]$, ou seja, $[-1,5]$, temos:



Desta forma, podemos verificar que o conjunto dos números inteiros que pertencem ao intervalo $[-1,5]$ é $\{-1,0,1,2,3,4,5\}$, ou seja existem, neste intervalo, 7 números inteiros.

Caderno 2

6.

6.1. Recorrendo à Regra de Laplace, e verificando que existe 1 caso favorável (a única bola com o número 2) e 3 casos possíveis (as três bolas do saco), temos que a probabilidade, escrita na forma de fração, é:

$$p=\frac{1}{3}$$

6.2. Organizando todos os resultados possíveis para o valor a calcular, recorrendo a uma tabela, temos:

Saco A \ Saco B	Bola «adição»	Bola «multiplicação»
Bolas 1 e 2	$1+2=3$	$1\times 2=2$
Bolas 1 e 3	$1+3=4$	$1\times 3=3$
Bolas 2 e 3	$2+3=5$	$2\times 3=6$

Assim, podemos verificar que existem 6 alternativas para calcular o valor final, dos quais apenas uma tem com valor final 4, pelo que recorrendo à Regra de Laplace, a probabilidade do valor obtido ser igual a 4, é:

$$p=\frac{1}{6}$$

Resposta: **Opção B**

7. Como $6\times 10^{-2}=0{,}06$; calculando a soma das duas parcelas, temos:

$$\begin{array}{r} 0{,}06 \\ +\ 0{,}05 \\ \hline 0{,}11 \end{array}$$

Logo, escrevendo o valor calculado em notação científica, vem:

$$0{,}11=1{,}1\times 10^{-1}$$

8. Recorrendo à expressão dada, podemos calcular o número total de círculos no 100º termo:

$$3\times 100+6=300+6=306$$

Observando a regularidade de que o número de círculos pretos, em cada termo, é igual ao número do termo, ou seja o termo de ordem n tem n círculos pretos, vem que o 100º termo tem 100 círculos pretos.

Assim o número de círculos brancos do 100º termo, pode ser calculado como a diferença entre o número total de círculos deste termo, e o número de círculos pretos, ou seja:

$$306-100=206 \text{ círculos brancos}$$

9. Como o gráfico da função f é a reta s, e as retas r e s são paralelas, os respetivos declives são iguais, pelo que:

$$m_s=m_r=1{,}5$$

Desta forma podemos garantir que as expressões das opções (C) e (D) não representam a função f

Como o ponto P pertence ao gráfico da função f, temos que $f(4)=9$. Assim calculando a imagem do objeto 4, recorrendo às expressões das opções (A) e (B), podemos verificar que a expressão da opção (A) é, de entre estas, a que define a função f:

- Opção (A): $f(4)=1{,}5\times 4+3=6+3=9$
- Opção (B): $f(4)=1{,}5\times 4+9=6+9=15$

Resposta: **Opção A**

10. Como o ponto P, pertence ao gráfico de ambas as funções, podemos determinar a ordenada do ponto P, calculando a imagem do objeto 2, pela função f:

$$y_P = f(2) = 2 \times 2^2 = 2 \times 4 = 8$$

Como a função g é uma função de proporcionalidade inversa, a sua expressão algébrica é da forma

$$g(x) = \frac{k}{x}, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Assim, substituindo as coordenadas do ponto P (que também pertence ao gráfico da função g), podemos calcular o valor de k:

$$8 = \frac{k}{2} \Leftrightarrow 8 \times 2 = k \Leftrightarrow 16 = k$$

Pelo que, uma expressão algébrica que define a função g, é:

$$g(x) = \frac{16}{x}$$

11. Podemos resolver cada um dos sistema para encontrar a solução indicada, ou em alternativa, substituir a solução em cada um dos sistemas, para identificar qual deles tem como solução o par ordenado (1,0):

- Opção (A): $\begin{cases} 1+0=0 \\ 1-0=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=0 \\ 1=1 \end{cases}$ (Proposição falsa)
- Opção (B): $\begin{cases} 1+0=0 \\ 1-0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=0 \\ 1=0 \end{cases}$ (Proposição falsa)
- Opção (C): $\begin{cases} 1+0=1 \\ 1-0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=1 \\ 1=0 \end{cases}$ (Proposição falsa)
- Opção (D): $\begin{cases} 1+0=1 \\ 1-0=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=1 \\ 1=1 \end{cases}$ (Proposição verdadeira)

Resposta: **Opção D**

12. Aplicando a propriedade distributiva, escrevendo a equação na fórmula canónica e usando a fórmula resolvente, vem:

$$x(x-1)+2 = 3-x^2 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 3 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + x^2 - x + 2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$(a = 2,\ b = -1$ e $c = -1)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1-(-8)}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1+3}{4} \vee x = \frac{1-3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{4}{4} \vee x = \frac{-2}{4} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{1}{2}$$

C.S.$=\left\{-\frac{1}{2},1\right\}$

13. Resolvendo a inequação, temos:

$$2(1-x) > \frac{x}{5}+1 \Leftrightarrow 2-2x > \frac{x}{5}+1 \Leftrightarrow \frac{2}{1}_{(5)} - \frac{2x}{1}_{(5)} > \frac{x}{5} + \frac{1}{1}_{(5)} \Leftrightarrow \frac{10}{5} - \frac{10x}{5} > \frac{x}{5} + \frac{5}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10-10x > x+5 \Leftrightarrow -10x - x > 5-10 \Leftrightarrow -11x > -5 \Leftrightarrow 11x < 5 \Leftrightarrow x < \frac{5}{11}$$

C.S.$=\left]-\infty, \frac{5}{11}\right[$

14. Usando as regras operatórias de potências e observando que $4 = 2^2$, temos que:

$$\frac{6^{10}}{3^{10}} \times 4^6 = \left(\frac{6}{3}\right)^{10} \times \left(2^2\right)^6 = 2^{10} \times 2^{2\times 6} = 2^{10} \times 2^{12} = 2^{10+12} = 2^{22}$$

15. Fazendo o desenvolvimento do caso notável, e simplificando, vem:

$$(x+2)^2 = x^2 + 2 \times 2 \times x + 2^2 = x^2 + 4x + 4$$

16.

16.1.

16.1.1. Como os triângulos $[PAB]$ e $[PCD]$ são semelhantes (porque têm um ângulo comum e os lados opostos a este ângulo - os lados $[AB]$ e $[CD]$ - são paralelos), então a razão entre lados correspondentes é igual, ou seja:

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$$

Desta forma, substituindo os valores conhecidos, calculamos a medida do diâmetro da circunferência c_2, ou seja, o valor de $\overline{PC}$:

$$\frac{\overline{PC}}{3{,}5} = \frac{6}{2} \Leftrightarrow \frac{\overline{PC}}{3{,}5} = 3 \Leftrightarrow \overline{PC} = 3 \times 3{,}5 \Leftrightarrow \overline{PC} = 10{,}5 \text{ cm}$$

Resposta: **Opção C**

16.1.2. Os pontos do plano que distam 3,5 cm do ponto P são os pontos que constituem uma circunferência de centro em P e raio 3,5 cm, ou seja, raio $\overline{PA}$

Resposta: **Opção B**

16.2. Como $[PC]$ é um diâmetro da circunferência a amplitude do arco respetivo é 180°

Assim podemos determinar a amplitude do arco CD como a diferença de amplitudes dos arcos PC e PD:

$$\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{PC} - \overset{\frown}{PD} = 180 - 110 = 70°$$

Como o ângulo CPD é o ângulo inscrito relativo ao arco CD, a amplitude do ângulo é igual a metade da amplitude do arco:

$$A\hat{P}B = C\hat{P}D = \frac{70}{2} = 35°$$