Prova final de Matemática - 3.º ciclo (2015, Época especial)

Proposta de resolução

Caderno 1

1. Como foi escolhido um dos convidados que gostam de gelatina, existem 8 escolhas possíveis (a Ana, o Paulo, o Rui, a Maria, o José, a Rosa, o Tomé e o Tiago).
Destes 8, apenas 3 gostam de *mousse* de chocolate (a Ana, o Paulo e o Rui).

   Desta forma, recorrendo à Regra de Laplace, existem 8 casos favoráveis para os convidados que gostam de gelatina e 3 casos favoráveis para que um desses convidados também goste de *mousse mousse*de chocolate, pelo que a probabilidade é $p = \frac{3}{8} = 0{,}375$.
Escrevendo a probabilidade na forma de percentagem, temos $p = 37{,}5\,\%$

   Resposta: **Opção B**

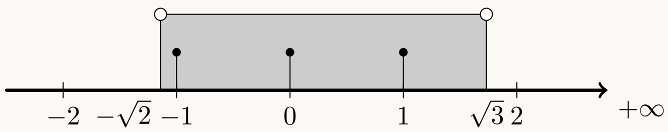
2. Como a média das idades dos quatro filhos do casal Martins é igual a 12,25 anos, designando por S_M a soma das idades dos quatro filhos do casal Martins, temos que

$$\frac{S_M}{4} = 12{,}25 \Leftrightarrow S_M = 12{,}25 \times 4 \Leftrightarrow S_M = 49$$

   Calculando o valor exato da média das idades dos cinco jovens, $\overline{x}$, vem

$$\overline{x} = \frac{S_M + 13}{5} = \frac{49+13}{5} = \frac{62}{5} = 12{,}4 \text{ anos}$$

3. Como $-\sqrt{2} \approx -1{,}1414$ e $\sqrt{3} \approx 1{,}7321$, representando na reta real o intervalo $\left]-\sqrt{2},\sqrt{3}\right[$, e os números inteiros que pertencem a este conjunto, temos:



   Assim, podemos verificar que o conjunto dos números inteiros que pertencem ao intervalo $\left]-\sqrt{2},\sqrt{3}\right[$ é

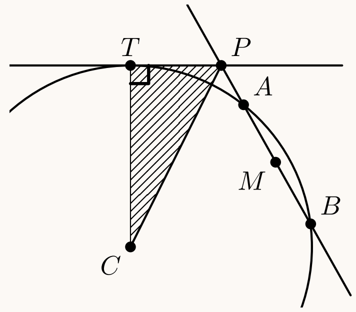
$$\{-1{,}0{,}1\}$$

4.

4.1. Como a reta TP é tangente à circunferência no ponto T é perpendicular ao raio $[CT]$, e por isso, o triângulo $[CTP]$ é retângulo em T

Assim, recorrendo ao Teorema de Pitágoras, podemos afirmar que

$$\overline{CP}^2 = \overline{CT}^2 + \overline{PT}^2$$



E substituindo os valores conhecidos, vem que:

$$\overline{CP}^2 = 9{,}2^2 + 4^2 \Leftrightarrow \overline{CP}^2 = 84{,}64 + 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{CP}^2 = 100{,}64 \underset{\overline{CP}>0}{\Rightarrow} \overline{CP} = \sqrt{100{,}64}$$

Escrevendo o resultado arredondado às unidades, temos

$$\overline{CP} = \sqrt{100{,}64} \approx 10$$

4.2. Como M é o ponto médio da corda $[AB]$, temos que $\overline{AM} = \overline{MB}$, e assim

$$\overline{PB} = \overline{PA} + \overline{AM} + \overline{MB} = \overline{PA} + 2 \times \overline{MB}$$

Logo, substituindo os valores conhecidos, vem

$$\overline{PB} = \overline{PA} + 2 \times \overline{MB} \Leftrightarrow 8 = 2 + 2 \times \overline{MB} \Leftrightarrow 8 - 2 = 2 \times \overline{MB} \Leftrightarrow \frac{6}{2} = \overline{MB} \Leftrightarrow 3 = \overline{MB}$$

Como $[CB]$ e $[CT]$ são raios da circunferência, vem que

$$\overline{CB} = \overline{CT} = 9{,}2$$

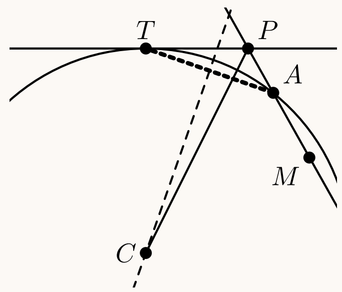
Como o triângulo $[BCA]$ é isósceles, e o ponto M é o ponto médio do lado menor $[AB]$, então $[CM]$ é a altura relativamente ao lado $[AB]$, e por isso o lado $[CM]$ é perpendicular ao lado $[AB]$, ou seja o triângulo $[BCM]$ é retângulo em M.
Como, relativamente ao ângulo BCM, o lado $[MB]$ é o cateto oposto e o lado $[CB]$ é a hipotenusa, usando a definição de seno, temos:

$$\text{sen}\,(B\hat{C}M) = \frac{\overline{MB}}{\overline{CB}} \Leftrightarrow \text{sen}\,(B\hat{C}M) = \frac{3}{9{,}2}$$

Como $\frac{3}{9{,}2} \approx 0{,}326$, procurando o valor mais próximo na coluna dos valores da tangente na tabela de valores das razões trigonométricas (ou recorrendo à calculadora), e arredondando a amplitude do ângulo BCM às unidades, temos que

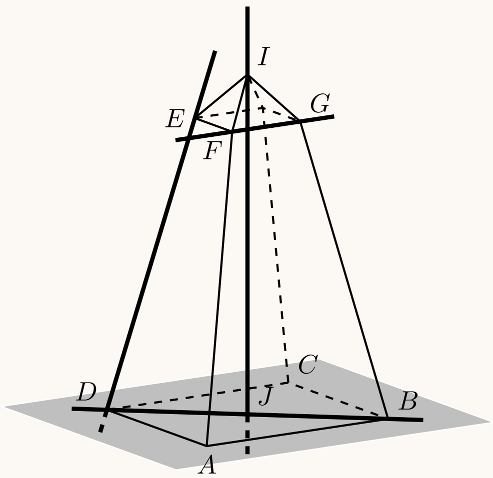
$$B\hat{C}M = \text{sen}^{-1}\left(\frac{3}{9{,}2}\right) \approx 19^\circ$$

4.3. Como a mediatriz de qualquer corda de uma circunferência contém o centro da circunferência, podemos afirmar que o ponto que pertencente à mediatriz do segmento de reta $[AT]$ é o ponto C



Resposta: **Opção C**

5.



5.1. Analisando as quatro retas indicadas podemos ver que:

- a reta FG é paralela ao plano ABC
- a reta ED é concorrente, mas não perpendicular ao plano ABC
- a reta BD pertence ao plano ABC

A reta IJ é perpendicular ao plano ABC

Resposta: **Opção B**

5.2. Considerando a expressão para o volume, V, de um tronco de pirâmide quadrangular regular, $V = \frac{h}{3}(L^2 + L \times l + l^2)$, temos para o tronco de pirâmide $[ABCDEFGH]$, que

$$L = \overline{AB} = 8 \text{ cm e } l = \overline{FG} = 3 \text{ cm}$$

Para determinar a medida h, consideramos o ponto K, o centro do quadrado $[EFGH]$, e temos que $\overline{IJ} = \overline{IK} + \overline{KJ}$, pelo que

$$h = \overline{IJ} - \overline{IK}$$

Como $\overline{IK}$ é a altura da pirâmide $[EFGHI]$, que tem volume 6 cm^3, podemos calcular $\overline{IK}$ recorrendo à expressão do volume da pirâmide:

$$V_{[EFGHI]} = \frac{1}{3} \times A_b \times a = \frac{1}{3} \times \overline{FG}^2 \times \overline{IK}$$

Substituindo os valores conhecidos, vem

$$6 = \frac{1}{3} \times 3^2 \times \overline{IK} \Leftrightarrow 6 = \frac{9}{3} \times \overline{IK} \Leftrightarrow 6 = 3 \times \overline{IK} \Leftrightarrow \frac{6}{3} = \overline{IK} \Leftrightarrow 2 = \overline{IK}$$

Logo, vem que $h = \overline{IJ} - \overline{IK} = 15 - 2 = 13$
E assim, recorrendo à expressão do volume do tronco de pirâmide quadrangular para calcular o volume em cm^3, do tronco de pirâmide $[ABCDEFGH]$, e arredondando o resultado às unidades, temos:

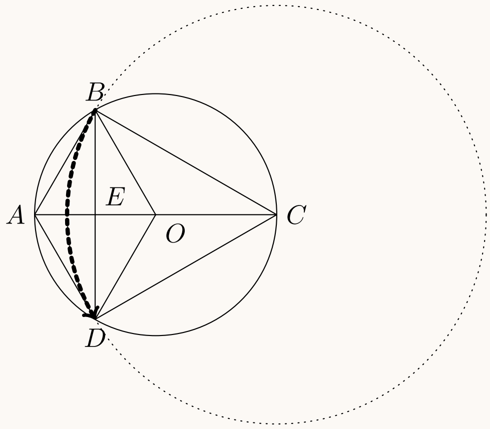
$$V_{[ABCDEFGH]} = \frac{13}{3}(64 + 24 + 9) = \frac{13}{3} \times 97 = \frac{1261}{3} \approx 420 \text{ cm}^3$$

Caderno 2

6.

6.1. Como $B\hat{A}D = E\hat{A}B + E\hat{A}D = 60 + 60 = 120°$ (porque os triângulos OAB e OAD são equiláteros), a rotação de centro A, que transforma o ponto B no ponto D tem amplitude $120°$ (no sentido negativo).

Relativamente à rotação de centro no ponto O, pela mesma razão a amplitude da rotação também tem amplitude de $120°$



Como o ponto E é o ponto médio do segmento de reta $[AD]$ a rotação de centro E, que transforma o ponto B no ponto D tem amplitude $180°$

Como o triângulo $[CBD]$ também é equilátero, a rotação de centro C, que transforma o ponto B no ponto D tem amplitude $60°$

Resposta: **Opção C**

6.2. Como E é o ponto médio do segmento de reta $[AO]$, temos que $\overline{AE} = \overline{EO}$, e assim, vem que

$$\overline{AO} = \overline{AE} + \overline{EO} = \overline{AE} + \overline{AE} = 1 + 1 = 2$$

Como os triângulos OAB e OAD são equiláteros, $\overline{AO} = \overline{AB} = \overline{BO} = \overline{AD} = \overline{DO}$, pelo que o perímetro do quadrilátero $[ABOD]$ é

$$P_{[ABOD]} = \overline{AB} + \overline{BO} + \overline{AD} + \overline{DO} = 4 \times \overline{AO} = 4 \times 2 = 8$$

6.3. Temos que a área do triângulo $[BAE]$, considerando o lado $[AE]$ como a base e o lado $[EB]$ como a altura, temos

$$A_{[BAE]} = \frac{\overline{AE} \times \overline{EB}}{2} = \frac{1 \times \overline{EB}}{2} = \frac{\overline{EB}}{2}$$

Relativamente a área do triângulo $[BOC]$, considerando o lado $[OC]$ como a base, a altura é o segmento $[EB]$, pelo que

$$A_{[BOC]} = \frac{\overline{OC} \times \overline{EB}}{2} = \frac{2 \times \overline{EB}}{2} = \overline{EB}$$

Assim, temos que

$$\frac{\text{área do triângulo } [BOC]}{\text{área do triângulo } [BAE]} = \frac{\overline{EB}}{\frac{\overline{EB}}{2}} = \frac{\frac{\overline{EB}}{1}}{\frac{\overline{EB}}{2}} = \frac{2 \times \overline{EB}}{\overline{EB}} = 2$$

7. Como x é o número de canetas de feltro compradas e y é o número de lápis de cor comprados, a afirmação *O número de canetas de feltro compradas foi o dobro do número de lápis de cor comprados* pode ser traduzida por $x = 2y$

   Como cada caneta de feltro custou 0,25 euros, x canetas de feltro custaram $0{,}25x$ euros; e como cada lápis de cor custou 0,20 euros, y lápis de cor custaram $0{,}20y$ euros.
   Como a escola gastou 63 euros na compra de x canetas de feltro e y lápis de cor, temos que $0{,}25x + 0{,}20y = 63$

   Assim, um sistema de equações que permite determinar o número de narizes vermelhos vendidos e o número de ímanes vendidos, pode ser

$$\begin{cases} x = 2y \\ \\ 0{,}25x + 0{,}20y = 63 \end{cases}$$

8. Escrevendo a equação na fórmula canónica, usando a fórmula resolvente e apresentando as soluções na forma de fração irredutível, vem:

$$x(6x-1) = 1 \Leftrightarrow 6x^2 - x = 1 \Leftrightarrow 6x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

   $(a = 6,\ b = -1 \text{ e } c = -1)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(6)(-1)}}{2(6)} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{12} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1+5}{12} \vee x = \frac{1-5}{12} \Leftrightarrow x = \frac{6}{12} \vee x = \frac{-4}{12} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{3}$$

   C.S.$=\left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$

9. Fazendo o desenvolvimento do caso notável, e simplificando, vem

$$(x-2)^2 - x^2 = x^2 - 2 \times 2 \times x + 2^2 - x^2 = x^2 - 4x + 4 - x^2 = -4 + 4x$$

   Resposta: **Opção A**

10. Como o gráfico é parte de uma reta que passa na origem, é o gráfico de uma função de proporcionalidade direta, pelo que a distância, percorrida pelo Martim, é diretamente proporcional ao tempo decorrido desde o instante em que saiu de casa até ao momento em que chegou à casa da sua avó.

    Assim, como pela observação do gráfico podemos verificar que em 8 minutos o Martim percorreu 400 metros, então podemos determinar a distância, x, em metros, percorrida em 10 minutos, ou seja, a distância, percorrida pelo Martim, desde que saiu de casa até chegar à casa da sua avó

$$\frac{x}{10} = \frac{400}{8} \Leftrightarrow x = \frac{400 \times 10}{8} \Leftrightarrow x = \frac{4000}{8} \Leftrightarrow x = 500 \text{ metros}$$

    Como o Martim regressou a casa pelo mesmo caminho, temos que a distância, em metros, percorrida pelo Martim no trajeto de ida e volta é

$$2x = 2 \times 500 = 1000 \text{ metros}$$

11. Como todos os números estão escritos em notação científica, a magnitude do número é maior se o expoente da potência de base 10 for maior.
Quando os expoentes das potências de base 10 são iguais, o maior número é o que tiver o maior valor multiplicado pela potência de base 10
Assim, ordenado os valores por ordem crescente,temos:

$$\begin{array}{ccccccc} 1{,}5 \times 10^{22} & < & 1{,}9 \times 10^{22} & < & 1{,}1 \times 10^{23} & < & 1{,}3 \times 10^{23} \\ b & < & d & < & c & < & a \end{array}$$

Resposta: **Opção A**

12. Aplicando as regras operatórias de potências temos que como $x^4 = 3$, então

$$x^8 = x^{4\times 2} = \left(x^4\right)^2 = (3)^2 = 9 \qquad \text{e} \qquad x^{-4} = \frac{1}{x^4} = \frac{1}{3}$$

Pelo que, fazendo a substituição na expressão e somando as frações, temos

$$\frac{x^8}{2} - x^{-4} = \frac{9}{2}_{(3)} - \frac{1}{3}_{(2)} = \frac{27}{6} - \frac{2}{6} = \frac{25}{6}$$

13. O termo de ordem n desta sequência tem n bolas pretos e um total de n^2 bolas, pelo que o número de bolas brancas, do termo de ordem n é

$$n^2 - n$$

Assim, o décimo termo da sequência, tem

$$10^2 - 10 = 100 - 10 = 90 \text{ bolas brancas}$$

14. Podemos calcular a ordenada do ponto de interseção dos dois gráficos, recorrendo à expressão algébrica da função f:

$$f(2) = 2^2 = 4$$

Como a função g é uma função de proporcionalidade inversa, a sua expressão algébrica é da forma

$$g(x) = \frac{k}{x}, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Assim, substituindo as coordenadas do ponto de interseção dos gráficos (que pertence ao gráfico da função g), podemos calcular o valor de k:

$$4 = \frac{k}{2} \Leftrightarrow 4 \times 2 = k \Leftrightarrow 8 = k$$

Ou seja, $g(x) = \dfrac{8}{x}$

Resposta: **Opção C**

15. Resolvendo a inequação, temos

$$\frac{2}{1}_{(6)} - \frac{x}{1}_{(6)} > \frac{x}{3}_{(2)} - \frac{1}{2}_{(3)} \Leftrightarrow \frac{12}{6} - \frac{6x}{6} > \frac{2x}{6} - \frac{3}{6} \Leftrightarrow 12 - 6x > 2x - 3 \Leftrightarrow -6x - 2x > -3 - 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -8x > -15 \Leftrightarrow 8x < 15 \Leftrightarrow x < \frac{15}{8}$$

C.S.$=\left]-\infty, \frac{15}{8}\right[$

16. Como, de acordo com o gráfico, em 50% dos jogos, ou seja em metade dos jogos, a equipa conseguiu 3 pontos, e na outra metade dos jogos não conseguiram os 3 pontos, logo o número total de jogos no campeonato é par, pelo que a mediana a média dos dois valores centrais, da lista ordenada das pontuações. Como 50% das pontuações obtidas pela equipa nos jogos desse campeonato foram 3 pontos, e os restantes 0 e 1 pontos, os valores centrais, na lista ordenada das pontuações são 1 e 3.

$$\underbrace{0 \; ... \; 0 \; 1 \; 1 \; ... \; 1}_{50\%} \; \underbrace{3 \; 3 \; ... \; 3 \; 3 \; 3}_{50\%}$$

Logo a mediana, $\tilde{x}$, das pontuações obtidas pela equipa nos jogos desse campeonato, é

$$\tilde{x} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ pontos}$$