Prova final de Matemática - 3.º ciclo (2014, 2.ª chamada)

Proposta de resolução

Caderno 1

1.

1.1. Como o ponto de coordenadas (2,4) pertence ao gráfico de f, então

$$f(2) = 4$$

1.2. Como a função f é uma função de proporcionalidade inversa, então $f(x) = \frac{k}{x}, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Como $f(2) = 4$, temos que

$$4 = \frac{k}{2} \Leftrightarrow 4 \times 2 = k \Leftrightarrow 8 = k$$

E assim, podemos calcular $f(5) = \frac{8}{5}$

Ou seja o ponto C tem de coordenadas $\left(5,\frac{8}{5}\right)$

Desta forma, temos que $\overline{OD} = 5$ e $\overline{DC} = \frac{8}{5}$, pelo que o perímetro do retângulo $[OBCD]$ é dado por

$$P_{[OBCD]} = 2 \times \overline{OD} + 2 \times \overline{DC} = 2 \times 5 + 2 \times \frac{8}{5} = 10 + \frac{16}{5} = \frac{50}{5} + \frac{16}{5} = \frac{66}{5} = 13{,}2$$

2. Como sabemos que $a \times b = 450$, os valores da opção (A) não podem ser os de a e de b porque $20 \times 23 = 460$
Como a e b são primos entre si, os valores da opção (C) não podem ser os valores de a e de b porque ambos são divisíveis por 3 e por 5
Pela mesma razão podemos excluir a opção (D) porque ambos os valores são múltiplos de 5
Assim, os valores de a e b podem ser 18 e 25, porque $18 \times 25 = 450$, e também podemos verificar que $18 = 2 \times 3^2$ e $25 = 5^2$, ou seja, 18 e 25 são primos entre si, porque não têm qualquer fator primo em comum.

Resposta: **Opção B**

3.

3.1. Como $[OA]$ e $[OC]$ são raios da mesma circunferência, $\overline{OC} = \overline{OA} = 2$

Assim, como o triângulo $[OBC]$ é retângulo, usando o Teorema de Pitágoras, temos que

$$\overline{BC}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OB}^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 2^2 + 3^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 4 + 9 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 13 \underset{\overline{BC}>0}{\Rightarrow} \overline{BC} = \sqrt{13}$$

Resposta: **Opção A**

3.2. Como $\overline{OA} = 2$ cm e $\overline{OB} = 3$ cm, então a semelhança que transforma o segmento de reta $[OA]$ no segmento de reta $[OB]$ é uma ampliação, e por isso a razão de semelhança (r) é maior que 1.

Assim temos $r = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \dfrac{3}{2}$

3.3. Começamos por determinar a área do círculo de centro em O e raio $\overline{OA}$:

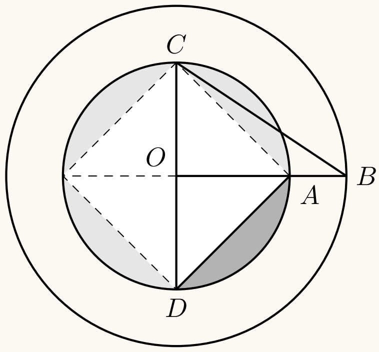
$$A_\circ = \pi \times \overline{OA}^2 = \pi \times 2^2 = 4\pi$$

Calculando a área do triângulo $[ODA]$, como $[OA]$ e $[OD]$ são raios da mesma circunferência, $\overline{OD} = \overline{OA} = 2$, e assim temos que:

$$A_{[ODA]} = \frac{\overline{OA} \times \overline{OD}}{2} = \frac{2 \times 2}{2} = 2$$

Como o quadrado de lado $\overline{AD}$ é composto por 4 triângulos com a mesma área do triângulo $[ODA]$, temos que a diferença das áreas do círculo e do quadrado é:

$$A_\circ - 4 \times A_{[ODA]} = 4\pi - 4 \times 2 = 4\pi - 8$$



Como a área sombreada é um quarto da diferença das áreas do círculo e do quadrado, calculando a área da região representada a sombreado (A_S), e arredondando o resultado às décimas, vem:

$$A_S = \frac{A_\circ - 4 \times A_{[ODA]}}{4} = \frac{4\pi - 4 \times 2}{4}\pi - 2 \approx 1{,}1$$

Assim a área da região sombreada é de 1,1 cm^2

4.

4.1. Como $[CDA]$ é um triângulo, e a reta CD é tangente à circunferência no ponto C e por isso perpendicular ao diâmetro $[CA]$, então a amplitude, em graus, do ângulo DAC, pode ser calculada como

$$D\hat{A}C + A\hat{C}D + C\hat{D}A = 180 \Leftrightarrow D\hat{A}C + 90 + 50 = 180 \Leftrightarrow D\hat{A}C = 180 - 140 \Leftrightarrow D\hat{A}C = 40°$$

Como o ângulo DAC é o ângulo inscrito relativo ao arco CB, temos que:

$$\overset{\frown}{CB} = 2 \times D\hat{A}C \Leftrightarrow \overset{\frown}{CB} = 2 \times 40 \Leftrightarrow \overset{\frown}{CB} = 80°$$

Resposta: **Opção C**

4.2. O triângulo $[ACD]$ é retângulo em C. Como, relativamente ao ângulo CDA, o lado $[CD]$ é o cateto adjacente e o lado $[CA]$ é o cateto oposto, usando a definição de tangente, temos:

$$\text{tg } 50° = \frac{\overline{CA}}{\overline{CD}} \Leftrightarrow \text{tg } 50° = \frac{\overline{CA}}{8} \Leftrightarrow 8 \times \text{tg } 50° = \overline{CA}$$

Como tg $50° \approx 1{,}19$, vem que:

$$\overline{CA} \approx 8 \times 1{,}19 \approx 9{,}52$$

Assim, arredondando o resultado às décimas, vem que $\overline{CA} \approx 9{,}5$ cm

Caderno 2

5.

5.1. Calculando o total de alunos de cada idade, vem:

	12 anos	13 anos	14 anos	15 anos	16 anos
Raparigas	4	14	10	9	5
Rapazes	15	12	9	9	3
Total	19	26	19	18	8

Como a moda ($\hat{x}$) desta distribuição é o valor da idade com maior frequência absoluta, ou seja, a observação com mais efetivos, temos que

$$\hat{x} = 13$$

5.2. Como cada aluno do 5º ano recebe uma rifa, serão distribuídas 20 rifas a alunos do 5º ano.
Como cada aluno do 6º ano recebe duas rifas, serão distribuídas $30 \times 2 = 60$ rifas a alunos do 6º ano.
Assim total serão distribuídas $20 + 60 = 80$ rifas.
Desta forma, recorrendo à Regra de Laplace, existem 60 casos favoráveis para que o aluno premiado seja do 6º ano e 80 casos possíveis, pelo que a probabilidade é

$$p = \frac{60}{80} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

6. Como se sabe que 10 é o valor exato da média dos números 9, 10, 14 e k, temos que

$$\frac{9+10+14+k}{4} = 10 \Leftrightarrow \frac{33+k}{4} = 10 \Leftrightarrow 33+k = 10 \times 4 \Leftrightarrow k = 40-33 \Leftrightarrow k = 7$$

Resposta: **Opção C**

7. Multiplicando 2^{49} por 2, e aplicando as regras operatórias de potências temos

$$2^{49} \times 2 = 2^{49} \times 2^1 = 2^{49+1} = 2^{50}$$

8. Analisando as quatro hipóteses temos que:

- -3 é um número inteiro e como $-3 > -\pi$, logo $-3 \in [-\pi, +\infty[$
- -4 é um número inteiro, mas como $-4 < -\pi$, logo $-4 \notin [-\pi, +\infty[$
- $-\pi \in [-\pi, +\infty[$, mas $-\pi$ não é um número inteiro
- $-\pi - 1 \notin [-\pi, +\infty[$, e também não é um número inteiro

Assim, das opções apresentadas, -3 é o único número que satifaz as duas condições impostas.

Resposta: **Opção A**

9. Resolvendo a inequação, temos

$$\frac{x}{10} + \frac{3x+1}{5}_{(2)} \geq \frac{x}{2}_{(5)} \Leftrightarrow \frac{x}{10} + \frac{6x+2}{10} \geq \frac{5x}{10} \Leftrightarrow x + 6x + 2 \geq 5x \Leftrightarrow 7x - 5x \geq -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq \frac{-2}{2} \Leftrightarrow x \geq -1$$

C.S.$=[-1, +\infty[$

10. Fazendo o desenvolvimento do caso notável, e simplificando, vem

$$(x-1)^2 - 1 = x^2 - 2 \times 1 \times x + 1^2 - 1 = x^2 - 2x + 1 - 1 = x^2 - 2x$$

Resposta: **Opção D**

11.

11.1. Podemos determinar a ordenada do ponto P, calculando a imagem de 2 pela função f:

$$f(2) = -2(2)^2 = -2 \times 4 = -8$$

Assim o ponto P tem de coordenadas $P(2,-8)$

Como o gráfico da função g é uma reta que passa na origem do referencial, a expressão algébrica da função g é da forma $g(x) = kx, k \in \mathbb{R}$
Como o ponto P também pertence ao gráfico de g, substituindo as coordenadas de P na expressão anterior, podemos determinar o valor de k:

$$-8 = k(2) \Leftrightarrow \frac{-8}{2} = k \Leftrightarrow -4 = k$$

Assim, temos que a função g é definida algebricamente por $g(x) = -4x$

Resposta: **Opção B**

11.2. Escrevendo a equação na fórmula canónica, e usando a fórmula resolvente vem:

$$-2x^2 = 4 - 3(x+1) \Leftrightarrow -2x^2 = 4 - 3x - 3 \Leftrightarrow -2x^2 - 4 + 3x + 3 = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$(a = -2,\ b = 3 \text{ e } c = -1)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-2)(-1)}}{2(-2)} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{-3+1}{-4} \vee x = \frac{-3-1}{-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2}{-4} \vee x = \frac{-4}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = 1$$

C.S.$=\left\{\frac{1}{2},1\right\}$

12. Seja x o número de quilómetros percorridos pelo médico.

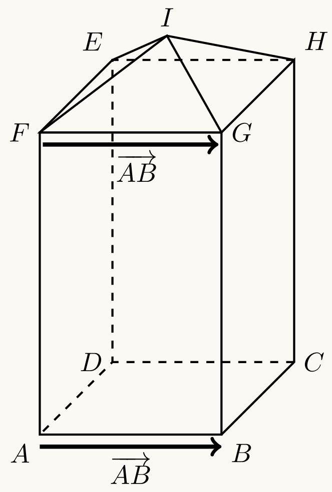
- $0{,}40x$ é o valor, em euros, a pagar pela deslocação do médico
- $0{,}40x + 10$ é o valor total, em euros, a pagar pela deslocação do médico e pela consulta
- $0{,}40x + 10 = 18$ é a equação que traduz o problema

Resolvendo a equação temos:

$$0{,}40x + 10 = 18 \Leftrightarrow 0{,}4x = 18 - 10 \Leftrightarrow \frac{4}{10}x = 8 \Leftrightarrow x = \frac{8 \times 10}{4} \Leftrightarrow x = 20$$

O médico percorreu 20 quilómetros nesta deslocação.

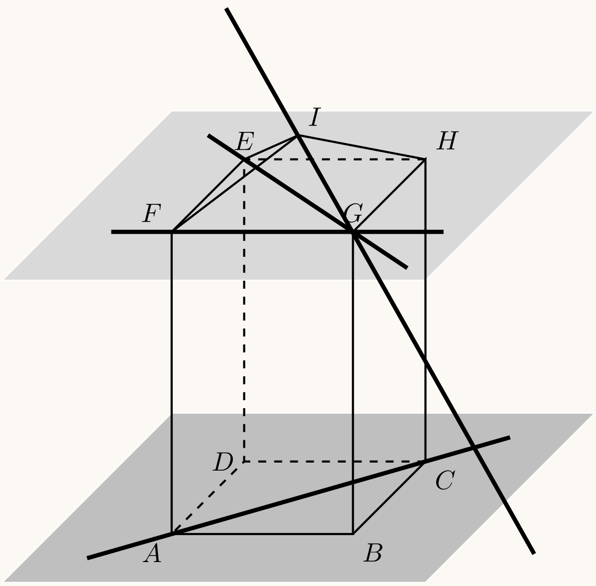
13.



13.1. A translação do ponto F pelo vetor $\overrightarrow{AB}$ é o ponto G

13.2. Analisando as quatro retas indicadas podemos ver que as retas FG e EG pertencem a um plano paralelo ao plano ABC, e por isso são paralelas ao plano ABC
A reta AC pertence ao plano ABC, pelo que não é concorrente com o plano.
A reta IG interseta o plano ABC num único ponto (que não está representado na imagem), ou seja é concorrente com o plano.

Resposta: **Opção D**



13.3. O volume de um prisma com a altura da pirâmide é $\frac{V}{4}$

O volume da pirâmide é um terço do prisma anterior, ou seja, $V' = \frac{\frac{V}{4}}{3} = \frac{V}{12}$

Assim, temos que

$$\frac{V'}{V} = \frac{\frac{V}{12}}{V} = \frac{V}{12V} = \frac{1}{12}$$