Caderno 1

1. Como as grandezas x e y são inversamente proporcionais, sabemos que $x \times y$ é um valor constante.
Então temos que
$$15 \times 20 = 12 \times a \Leftrightarrow 300 = 12a \Leftrightarrow \frac{300}{12} = a \Leftrightarrow 25 = a$$

2. Organizado os dados numa tabela, podemos obter os quatro primeiros termos da sequência subtraindo sucessivamente 3 a cada termo, partindo do quinto termo:

Ordem	1	2	3	4	5
Termo	2	5	8	11	14

Pela observação da tabela podemos verificar que todos os termos da sequência diferem de 1 unidade de um múltiplo de 3. Assim, temos que

- 8 é um termo da sequência, porque $8 = 3 \times 3 - 1$
- 80 é um termo da sequência porque $80 = 3 \times 27 - 1$
- 800 é um termo da sequência porque $800 = 3 \times 267 - 1$

Logo 88 não é um termo da sequência porque $88 = 3 \times 30 - 2$

Resposta: **Opção C**

3. Como sabemos que $a \times b = 882$, os valores da opção (A) não podem ser os de a e de b porque $7 \times 119 = 833$
Podemos excluir os valores da opção (C), porque $42 = 2 \times 21$, logo o máximo divisor comum entre estes números é 21 e não 7
Também podemos excluir a opção (D) porque 7 não é um divisor de 18, logo não pode ser o máximo divisor comum entre 18 e 49
Assim, os valores de a e b podem ser 14 e 63, porque $14 \times 63 = 882$, e também podemos verificar que, como $14 = 2 \times 7$ e $63 = 3^2 \times 7$, logo, M.d.c.(14,63)=7

Resposta: **Opção B**

4.

4.1. O lugar geométrico dos pontos que estão a igual distância de um ponto fixo é uma circunferência.
Neste caso o lugar geométrico é a circunferência de centro no ponto A e raio 1,6 cm (ou raio $\overline{AP}$).

4.2. O triângulo $[APB]$ é retângulo em P. Como, relativamente ao ângulo BAP, o lado $[AP]$ é o cateto adjacente e o lado $[BP]$ é o cateto oposto, usando a definição de tangente, temos:

$$\text{tg } 65^\circ = \frac{\overline{BP}}{\overline{AP}} \Leftrightarrow \text{tg } 65^\circ = \frac{\overline{BP}}{1{,}6} \Leftrightarrow 1{,}6 \times \text{ tg } 65^\circ = \overline{BP}$$

Como $\text{tg } 65^\circ \approx 2{,}14$, vem que:

$$\overline{BP} \approx 1{,}6 \times 2{,}14 \approx 3{,}42$$

Assim, arredondando o resultado às décimas, vem que $\overline{BP} \approx 3{,}4$ cm

4.3. Como o ângulo BOC é o ângulo ao centro que, para o mesmo arco, corresponde ao ângulo inscrito BAC temos que $B\hat{O}C = 2 \times B\hat{A}C$

Assim, vem que $B\hat{O}C = 2 \times 65 = 130^\circ$

Resposta: **Opção C**

5.

5.1. O volume total (V_T) do sólido pode ser calculado como a soma dos volumes do paralelepípedo retângulo (V_{PR}) e do prisma triangular (V_{PT}).
Calculando o volume do paralelepípedo retângulo, temos:

$$V_{PR} = \overline{DE} \times \overline{DJ} \times \overline{CD} = 15 \times 15 \times 6 = 1350$$

Calculando o volume do prisma triangular, considerando como base o triângulo $[ABC]$ e a altura a medida da aresta $[CI]$, como $\overline{CI} = \overline{DJ}$ e $\overline{AC} = \overline{DE}$, vem

$$V_{PT} = A_{[ABC]} \times \overline{DJ} = \frac{\overline{AC} \times h}{2} \times \overline{DJ} = \frac{15 \times 6}{2} \times 15 = 15 \times 3 \times 15 = 675$$

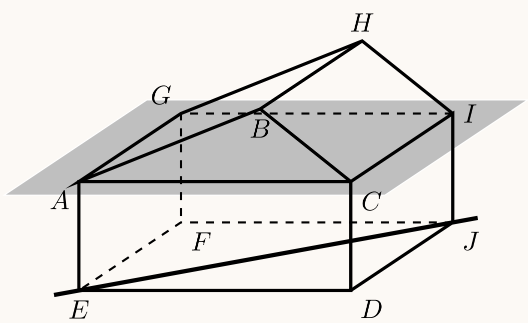
Assim, temos que

$$V_T = V_{PR} + V_{PT} = 1350 + 675 = 2025$$

Logo o volume total do sólido é 2025 cm^3

5.2. Como o plano ACI é o plano que contém a base superior do paralelepípedo retângulo, qualquer reta contida na base inferior do paralelepípedo é paralela ao plano ACI e não está contida no plano.

Assim, usando as letras da figura, uma das respostas possíveis é a reta EJ



Caderno 2

6. Observando os dados do gráfico, podemos concluir que o número total de alunos da turma é $10+5+7=22$, dos quais 5 têm olhos azuis.
Assim, temos que, recorrendo à Regra de Laplace, existem 5 casos favoráveis para que o aluno escolhido tenha olhos azuis e 22 casos possíveis, pelo que a probabilidade é

$$p=\frac{5}{22}$$

7.

7.1. Como o casal tem 3 filhos, duas filhas (que vamos designar por M_1 e M_2) e um filho (que vamos designar por H), podemos organizar uma lista de todas as disposições possíveis para a fotografia:

$H\ M_1\ M_2$	$H\ M_2\ M_1$	$M_1\ H\ M_2$	$M_1\ M_2\ H$	$M_2\ H\ M_1$	$M_2\ M_1\ H$

Observando os seis casos possíveis, podemos verificar que em 4 deles as filhas do casal ficam juntas, pelo que, recorrendo à Regra de Laplace, temos que a probabilidade é

$$p=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

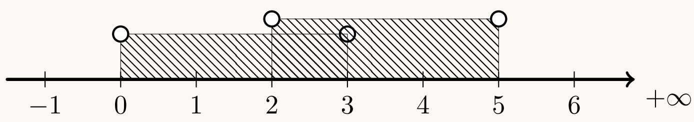
Resposta: **Opção C**

7.2. Designado por x a idade do filho do casal Silva, como o valor exato da média das idades dos três irmãos é 14, temos que

$$\frac{15+15+x}{3}=14 \Leftrightarrow \frac{30+x}{3}=14 \Leftrightarrow 30+x=3\times 14 \Leftrightarrow 30+x=42 \Leftrightarrow x=42-30 \Leftrightarrow x=12$$

Logo, o filho do casal Silva tem 12 anos.

8. Representando o conjunto na reta real, temos:



Assim temos que $]0,3[\cup]2,5[=]0,5[$

Resposta: **Opção A**

9. Usando as potências de 2 e a potência de expoente negativo, temos que:

$$\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}=2^{-3}$$

10.

10.1. Dois pontos com a mesma ordenada pertencem à mesma reta horizontal.
Assim, dois pontos com a mesma ordenada, são (por exemplo) os pontos A e B

10.2. A altura do trapézio ($\overline{AD}$) pode ser calculada como a diferença das ordenadas dos pontos B e C
Assim, calculando a ordenada do ponto B, recorrendo à função g, temos:

$$y_B = g(2) = 2(2)^2 = 2 \times 4 = 8$$

Da mesma forma, podemos obter a ordenada do ponto C, com recurso à função f:

$$y_C = f(4) = \frac{1}{2} \times 4 = \frac{4}{2} = 2$$

Assim temos que $\overline{AD} = y_B - y_C = 8 - 2 = 6$, $\overline{DC} = 4$ e $\overline{AB} = 2$

Calculado a área do trapézio $[ABCD]$, vem:

$$A_{[ABCD]} = \frac{B+b}{2} \times h = \frac{\overline{DC} + \overline{AB}}{2} \times \overline{AD} = \frac{4+2}{2} \times 6 = \frac{6}{2} \times 6 = 3 \times 6 = 18$$

11. Pela observação da figura, temos que

$$\overline{OB} = \overline{OA} - \overline{BA} = a - 3$$

Assim, a área do quadrado de lado $\overline{OB}$ é

$$A = (a-3) \times (a-3) = (a-3)^2 = a^2 - 2 \times 3 + 3^2 = a^2 - 6a + 9$$

Resposta: **Opção B**

12. Escrevendo a equação na fórmula canónica, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$x = 4x^2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{1}_{(2)} = \frac{4x^2}{1}_{(2)} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = 8x^2 - 1 \Leftrightarrow -8x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$(a = -8,\ b = 2 \text{ e } c = 1)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-8)(1)}}{2(-8)} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{-16} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{-16} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 6}{-16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2-6}{-16} \vee x = \frac{-2+6}{-16} \Leftrightarrow x = \frac{-8}{-16} \vee x = \frac{4}{-16} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{4}$$

C.S.$=\left\{-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\}$

13. Resolvendo a inequação, temos

$$1 + \frac{x+1}{2} \geq \frac{1}{3}(1-2x) \Leftrightarrow 1 + \frac{x+1}{2} \geq \frac{1}{3} - \frac{2x}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{1}_{(6)} + \frac{x+1}{2}_{(3)} \geq \frac{1}{3}_{(2)} - \frac{2x}{3}_{(2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{6} + \frac{3x+3}{6} \geq \frac{2}{6} - \frac{4x}{6} \Leftrightarrow 3x + 4x \geq 2 - 6 - 3 \Leftrightarrow 7x \geq -7 \Leftrightarrow x \geq \frac{-7}{7} \Leftrightarrow x \geq -1$$

C.S.$=[-1, +\infty[$

14.

14.1. Como os triângulos $[ABC]$ e $[ADE]$ são semelhantes, e os lados $[BC]$ e $[DE]$ são lados correspondentes, a razão de semelhança (r) é

$$r = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Como a razão das áreas é o quadrado da razão de semelhança, temos que

$$\frac{\text{área do triângulo } [ADE]}{\text{área do triângulo } [ABC]} = r^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

Resposta: **Opção D**

14.2.

14.2.1. Designado por M o ponto médio do lado $[BC]$, temos que o triângulo $[AMB]$ é retângulo em M, e que

$$\overline{BM} = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

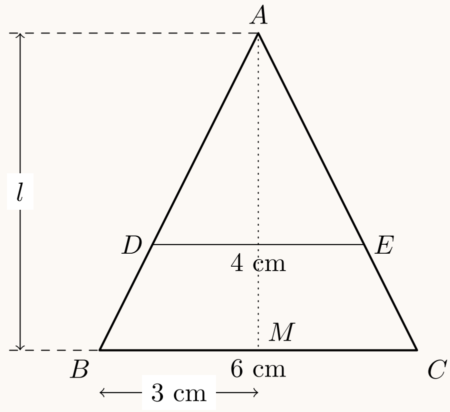
Como $l = \overline{AM}$, usando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 \Leftrightarrow 7^2 = \overline{AM}^2 + 3^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 49 = \overline{AM}^2 + 9 \Leftrightarrow 49 - 9 = \overline{AM}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 40 = \overline{AM}^2 \underset{\overline{AM}>0}{\Rightarrow} \sqrt{40} = \overline{AM}$$

Resposta: **Opção C**



14.2.2. Os triângulos $[ABC]$ e $[AFC]$ são congruentes, porque $\overline{AF} = \overline{BC}$, $[AC]$ é um lado comum, e os ângulos ACB e CAF são iguais (porque são ângulos alternos internos).

Assim, temos que os lados $[FC]$ e $[AB]$ são lados correspondentes, e por isso $\overline{FC} = \overline{AB} = 7$

Logo o raio da circunferência de centro em F e que contém o ponto C tem comprimento 7 cm.