

Prova final de Matemática - 3.º ciclo (2013, 1.ª chamada)

Proposta de resolução



1. Como o João escolhe 1 de entre 9 bolas, o número de casos possíveis para as escolhas do João são 9.

Como os números 2, 3, 5 e 7 são primos, têm apenas 2 divisores (o próprio número e o número 1).

O número 1 tem também apenas um divisor.

Os números 4, 6, 8 e 9 têm mais do que 2 divisores porque para além do próprio número e do número 1, são também todos divisíveis por 2 ou 3.

Ou seja, o número de casos favoráveis é 4.

Assim, recorrendo à Regra de Laplace, temos que a probabilidade de que o João escolha uma bola com um número que tenha 2 divisores é

$$p = \frac{4}{9}$$

Resposta: **Opção C**

2.

- 2.1. Como a turma da Rita tem um número par de alunos, a mediana é a média dos dois valores centrais, da lista ordenada das idades.

Como 50% dos alunos tem 13 anos, e os restantes têm 14 e 15 anos, os valores centrais, na lista ordenada das idades são 13 e 14.

$$\underbrace{13 \ 13 \ \dots \ 13 \ 13}_{50\%} \quad \underbrace{14 \ \dots \ 14 \ 15 \ \dots \ 15}_{50\%}$$

Logo a mediana, \tilde{x} , das idades dos alunos da turma da Rita é

$$\tilde{x} = \frac{13 + 14}{2} = \frac{27}{2} = 13,5$$

- 2.2. Quando a classe tinha vinte alunos, a média das idades destes vinte alunos era de 13,2 anos, o que poderia ser escrito como

$$\frac{k}{20} = 13,2 \Leftrightarrow k = 13,2 \times 20 \Leftrightarrow k = 264$$

em que k é a soma das idades dos 20 alunos.

Como abandonaram a classe 2 alunos, o número total de alunos passou a ser de 18, e como estes alunos tinham 15 anos e a idade dos restantes não se alterou, a soma das idades dos 18 alunos passou a ser de

$$k - 15 \times 2 = 264 - 30 = 234$$

Logo a média, \bar{x} , dos 18 alunos é

$$\bar{x} = \frac{234}{18} = 13$$

3. Aplicando repetidamente a propriedade referida, até obter o máximo divisor comum de dois números iguais, temos que

$$\begin{array}{l|l} \text{Como } 80 - 32 = 48 & \text{m.d.c.}(80,32) = \text{m.d.c.}(48,32) \\ \text{Como } 48 - 32 = 16 & \text{m.d.c.}(48,32) = \text{m.d.c.}(32,16) \\ \text{Como } 32 - 16 = 16 & \text{m.d.c.}(32,16) = \text{m.d.c.}(16,16) \end{array}$$

Como $\text{m.d.c.}(16,16) = 16$, então temos que

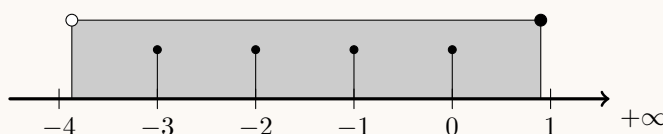
$$\text{m.d.c.}(80,32) = \text{m.d.c.}(16,16) = 16$$

4. Simplificando a expressão, usando as regras operatórias de potências de expoente racional, temos que:

$$a^{-2} \times a^4 = a^{-2+4} = a^2$$

Resposta: **Opção C**

5. Como $-\sqrt{15} \approx -3,87$, representando na reta real o intervalo $] -\sqrt{15} ; 0,9]$, e os números inteiros que pertencem a este conjunto, temos:



Assim, podemos verificar que

- o **menor** número inteiro que pertence ao conjunto A é -3
- o **maior** número inteiro que pertence ao conjunto A é 0

6. Como, num triângulo, a soma dos comprimentos de quaisquer dois lados não pode ser inferior ao comprimento do outro lado, podemos considerar, por exemplo, triângulos com comprimentos

- 3, 3 e 1, porque $3 + 3 + 1 = 7$ e temos que $3 + 1 > 3$ bem como $3 + 3 > 1$
- 2, 2 e 3, porque $2 + 2 + 3 = 7$ e temos que $2 + 3 > 2$ bem como $2 + 2 > 3$

7.

- 7.1. Como o volume do prisma é 42 cm^3 e o cubo tem o mesmo volume do prisma, temos que a medida a , da aresta do cubo, em centímetros, arredondada às décimas, é tal que

$$a^3 = 42$$

Logo,

$$a = \sqrt[3]{42} \approx 3,5$$

Resposta: **Opção C**



7.2. Sabemos que o volume(V) do um prisma é o produto da área da base (A_b) pela altura (h):

$$V = A_b \times h$$

Considerando a base do prisma o triângulo $[ABC]$, a altura a aresta $[AE]$, e a medida do volume 42, e substituindo as medidas conhecidas vem

$$V = A_{[ABC]} \times \overline{AE} \Leftrightarrow 42 = \frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{2} \times \overline{AE} \Leftrightarrow 42 = \frac{\overline{AB} \times 2}{2} \times 6 \Leftrightarrow \frac{42}{6} = \overline{AB} \Leftrightarrow 7 = \overline{AB}$$

Assim, como, relativamente ao ângulo ABC , o lado $[AC]$ é o cateto oposto e o lado $[AB]$ é o cateto adjacente, recorrendo à definição de tangente de um ângulo, temos que

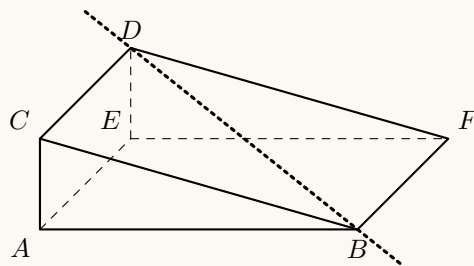
$$\operatorname{tg}(A\hat{B}C) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(A\hat{B}C) = \frac{2}{7}$$

Como $\frac{2}{7} \approx 0,2857$, procurando o valor mais próximo na coluna dos valores da tangente na tabela de valores das razões trigonométricas (ou recorrendo à calculadora), e arredondando a amplitude do ângulo ABC às unidades, temos que

$$A\hat{B}C = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2}{7}\right) \approx 16^\circ$$

7.3. Escolhendo um dos pontos, B ou C , e outro ponto assinalado na figura definimos retas concorrentes com a reta CB .

É ainda necessário fazer essa escolha de forma a evitar que a reta definida contenha uma aresta do prisma, pelo que uma das escolhas possíveis é, por exemplo, a reta BD .



8.

8.1. Como o ângulo ACB é um ângulo inscrito, o arco correspondente tem o dobro da amplitude, ou seja,

$$\widehat{AB} = 2 \times A\hat{C}B = 2 \times 36 = 72^\circ$$

Resposta: **Opção D**

8.2. Como os triângulos $[ABC]$ e $[CDE]$ são semelhantes, e os lados $[BC]$ e $[CD]$ são correspondentes (porque são os lados que se opõem ao ângulo reto, em cada um dos triângulos), então $\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} = 0,5$ é a razão de semelhança.

Como o quociente das áreas de figuras semelhantes, é igual ao quadrado da razão de semelhança, vem que

$$\frac{\text{área do triângulo } [CDE]}{\text{área do triângulo } [ABC]} = \left(\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}\right)^2 = 0,5^2 = 0,25$$

Resposta: **Opção B**



8.3. Como o triângulo $[ABC]$ é retângulo em A (porque um dos lados coincide com o diâmetro da circunferência e o vértice oposto a esse lado está sobre a circunferência), usando o Teorema de Pitágoras e substituindo as medidas conhecidas, temos que:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 6^2 + 10^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 36 + 100 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 136 \xrightarrow{\overline{BC} > 0} \overline{BC} = \sqrt{136}$$

Logo, como $[BC]$ é um diâmetro do círculo, a medida do raio, r , é:

$$r = \frac{\sqrt{136}}{2} \approx 5,83$$

E assim, calculando a área do círculo de diâmetro $[BC]$, em cm^2 , e arredondando o resultado às unidades, vem

$$A = \pi r^2 \approx \pi \times 5,83^2 \approx 107 \text{ cm}^2$$

9. Escrevendo a equação na fórmula canônica, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$2x^2 + 3x = 3(1 - x) + 5 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x = 3 - 3x + 5 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 3 + 3x - 5 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(a = 2, b = 6 \text{ e } c = -8)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(2)(-8)}}{2(2)} \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 64}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-6 + 10}{4} \vee x = \frac{-6 - 10}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4}{4} \vee x = \frac{-16}{4} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -4$$

$$\text{C.S.} = \{-4, 1\}$$

10.

10.1. Como a abscissa do ponto A é 1 ($x_A = 1$), podemos calcular a ordenada do ponto E , y_E , com recurso à função f :

$$y_E = f(x_A) = f(1) = 1$$

E assim, como o ponto A tem de ordenada zero (porque pertence ao eixo das abcissas), vem que

$$\overline{AE} = y_E - y_A = 1 - 0 = 1$$

Analogamente, recorrendo à função g , podemos determinar a ordenada do ponto D , y_D :

$$y_D = g(x_A) = g(1) = 3(1)^2 = 3 \times 1 = 3$$

Como os pontos C e D têm a mesma ordenada, temos que $y_C = y_D = 3$, e assim, como o ponto B tem de ordenada zero (porque pertence ao eixo das abcissas), vem que

$$\overline{BC} = y_C - y_B = 3 - 0 = 3$$

Finalmente, como o ponto C está sobre a reta $y = x$, então a sua abscissa e a sua ordenada são iguais $x_C = y_C = 3$, e o ponto tem a mesma abscissa que o ponto C , ou seja, $x_B = x_C = 3$. Logo, temos que

$$\overline{AB} = x_B - x_A = 3 - 1 = 2$$

Assim, calculando a medida área do trapézio, A_T , considerando $[BC]$ como a base maior, $[AE]$ como a base menor e $[AB]$ como a altura, vem

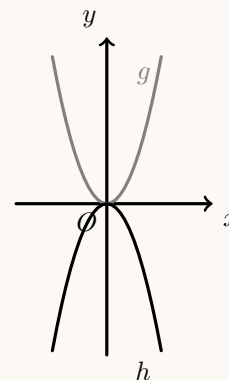
$$A_T = \frac{\overline{BC} + \overline{AE}}{2} \times \overline{AB} = \frac{3 + 1}{2} \times 2 = \frac{4}{2} \times 2 = 4$$



- 10.2. Considerando o gráfico da função h como o simétrico do gráfico da função g relativamente ao eixo das abcissa, podemos observar que as duas parábolas têm a mesma abertura (ver figura ao lado), ou seja o coeficiente de x^2 deve ter o mesmo valor absoluto nas duas funções, pelo que

$$h(x) = -3x^2$$

Resposta: **Opção D**



11. Resolvendo o sistema, temos:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - \frac{1+y}{2} = 3 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \frac{1+y}{2} \\ 2\left(3 + \frac{1+y}{2}\right) + 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \frac{1+y}{2} \\ 6 + 2 \times \frac{1+y}{2} + 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \frac{1+y}{2} \\ 6 + 1 + y + 3y = -1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \frac{1+y}{2} \\ 7 + 4y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \frac{1+y}{2} \\ 4y = -1 - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \frac{1+y}{2} \\ y = \frac{-8}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \frac{1-2}{2} \\ y = -2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{1(2)} + \frac{-1}{2} \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{2} - \frac{1}{2} \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = -2 \end{cases} \\ C.S. = \left\{ \left(\frac{5}{2}, -2 \right) \right\} & \end{aligned}$$

12. De acordo com o enunciado, sabemos que a máquina A demora 12 horas a fabricar todos os tapetes encomendados por uma certa empresa, e que como produz 6 tapetes por hora, podemos afirmar que a empresa encomendou $12 \times 6 = 72$ tapetes.

Como a máquina B produz x tapetes por hora, a produção de 72 tapetes irá demorar $\frac{72}{x}$ horas, ou seja, $\frac{72}{x}$ representa o número de horas que demora a produzir todos os tapetes encomendados pela empresa usando a máquina B.

13. A área da região a sombreado, A_S , pode ser calculada como a diferença entre a área do quadrado $[ABCD]$ ($A_{[ABCD]} = a^2$) e a área do quadrado $[EFGH]$ ($A_{[EFGH]} = b^2$). Assim, temos que

$$A_S = A_{[ABCD]} - A_{[EFGH]} = a^2 - b^2 = a^2 + ab - ab - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Resposta: **Opção C**

