Prova final de Matemática - 3.º ciclo (2012, 2.ª chamada)

Proposta de resolução

1.

1.1. Como a soma das frequências relativas é sempre 1, temos que

$$0{,}3 + a + 0{,}4 = 1 \Leftrightarrow a = 1 - 0{,}3 - 0{,}4 \Leftrightarrow a = 1 - 0{,}7 \Leftrightarrow a = 0{,}3$$

Resposta: **Opção** 0,3

1.2. Não. Quando se repete muitas vezes uma experiência aleatória, a frequência relativa de uma observação tende a aproximar-se da probabilidade de acontecer essa observação.
Assim, se repetirmos o procedimento da Maria um milhão de vezes, e metade das bolas no saco tem o número 1, é expectável que a frequência relativa do número 1 se aproxime muito de 0,5

2. Como a probabilidade de selecionar uma carta vermelha é de 75%, significa, que no conjunto de todas as cartas, as 12 cartas vermelhas são 75% do total, pelo que podemos calcular quantas cartas correspondem a 100%

$$\begin{array}{ccc} 12 & \text{——} & 75\% \\ \text{t} & \text{——} & 100\% \end{array}$$

$$t = \frac{12 \times 100}{75} = 16$$

Assim, temos que existem 12 cartas vermelhas num total de 16 cartas, e como só existem cartas vermelhas e pretas, o número de cartas pretas é

$$16 - 12 = 4$$

Resposta: **Opção** 4

3. Como os lados consecutivos de um retângulo são o comprimento, c, e a largura, l, temos que a medida da área, A, do retângulo é

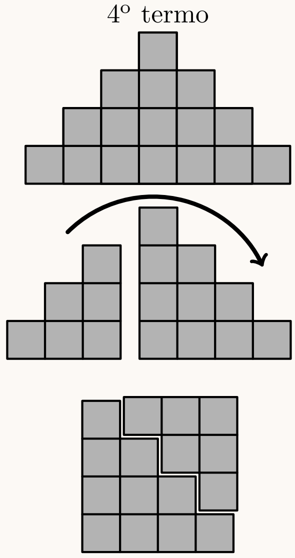
$$A = c \times l = \frac{1}{2r} \times 10^{-20} \times r \times 10^{30} = \frac{1}{2r} \times r \times 10^{-20} \times 10^{30} = \frac{r}{2r} \times 10^{-20+30} =$$

$$= \frac{1}{2} \times 10^{10} = 0{,}5 \times 10^{10} = 5 \times 10^{-1} \times 10^{10} = 5 \times 10^{-1+10} = 5 \times 10^{9}$$

Resposta: **Opção** 5×10^9

4. Como $\pi \approx 3{,}1416$, um número maior que 3,14 e menor que π, é, por exemplo:

$$3{,}141$$



5. Considerando os termos da sequência do número de quadrados em cada figura numa tabela, temos:

Ordem	1	2	3	4	5
Termos	1	4	9	16	25

O que nos permite conjeturar que esta sequência é a sequência dos quadrados perfeitos... com efeito, é possível fazer um arranjo dos quadrados de cada termo da sequência no sentido de verificar que no termo de ordem n, temos exatamente n^2 quadrados (como na figura ao lado).

Assim, como $14^4 = 196$ e $15^2 = 225$, verificamos que 200 não é um quadrado perfeito, ou seja não existe nenhum termo na sequência constituído por 200 quadrados.

6.

6.1. Como d é a distância, em milhões de quilómetros, percorrida pela luz em t segundos, temos que no contexto da situação descrita, a afirmação «Tem-se $d = 0{,}6$ quando $t = 2$» significa que em 2 segundos a luz precorre uma distância de 0,6 milhões de quilómetros.

6.2. Como a distância do Sol à Terra é 150 milhões de quilómetros, temos que $d = 150$, pelo o tempo t, em segundos, que a luz demora a precorrer esta distância é

$$150 = 0{,}3t \;\Leftrightarrow\; \frac{150}{0{,}3} = t \;\Leftrightarrow\; 500 = t$$

Assim, escrevendo o resultado em minutos e segundos, temos que 500 segundos corresponde $\dfrac{500}{60} \approx$ 8,33 minutos.
Como 8 minutos correspondem a $8 \times 60 = 480$ segundos e $500 - 480 = 20$ temos que 500 segundos correspondem a 8 minutos e 20 segundos, ou seja, a luz emitida pelo Sol demora 8 minutos e 20 segundos a chegar à Terra.

7. Resolvendo a inequação, temos

$$x - \frac{1}{2}(x-6) \le 5x + \frac{10}{3} \;\Leftrightarrow\; x - \frac{x}{2} + \frac{6}{2} \le 5x + \frac{10}{3} \;\Leftrightarrow\; \frac{x}{1}_{(6)} - \frac{x}{2}_{(3)} + \frac{6}{2}_{(3)} \le \frac{5x}{1}_{(6)} + \frac{10}{3}_{(2)} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{6x}{6} - \frac{3x}{6} + \frac{18}{6} \le \frac{30x}{6} + \frac{20}{6} \;\Leftrightarrow\; 6x - 3x + 18 \le 30x + 20 \;\Leftrightarrow\; 3x \le 30x + 20 - 18 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 3x - 30x \le 2 \;\Leftrightarrow\; -27x \le 2 \;\Leftrightarrow\; 27x \ge -2 \;\Leftrightarrow\; x \ge -\frac{2}{27}$$

C.S.$= \left[-\frac{2}{27}, +\infty\right[$

8. Escrevendo a equação na fórmula canónica, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$x(x-2)+3(x-2)=0 \Leftrightarrow x^2-2x+3x-6=0 \Leftrightarrow x^2+x-6=0 \Leftrightarrow$$

$(a=1,\ b=1 \text{ e } c=-6)$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(-6)}}{2(1)} \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{-1+5}{2} \vee x=\frac{-1-5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{4}{2} \vee x=\frac{-6}{2} \Leftrightarrow x=2 \vee x=-3$$

C.S.=$\{-3,2\}$

9. Como o grupo era constituído por 6 adultos, o preço a pagar pelos bilhetes de adulto é de $6x$ e para comprar os bilhetes das 10 crianças, o valor a pagar é de $10y$. Assim, como no total foram pagos 108,70 euros pelos bilhetes, temos que

$$6x+10y=108{,}70$$

Como o Pedro verificou que a diferença total, no caso de ele pagar bilhete de adulto era de 3,45 euros, significa que a diferença entre o preço do bilhete de adulto (x) e de criança (y) é de 3,45 euros, o que nos permite escrever que

$$x-y=3{,}45$$

Assim, um sistema de equações que permite determinar o preço do bilhete de adulto (valor de x) e o preço do bilhete de criança (valor de y) é

$$\begin{cases} 6x+10y=108{,}70 \\ \\ x-y=3{,}45 \end{cases}$$

10. Fazendo o desenvolvimento do caso notável, e simplificando, vem

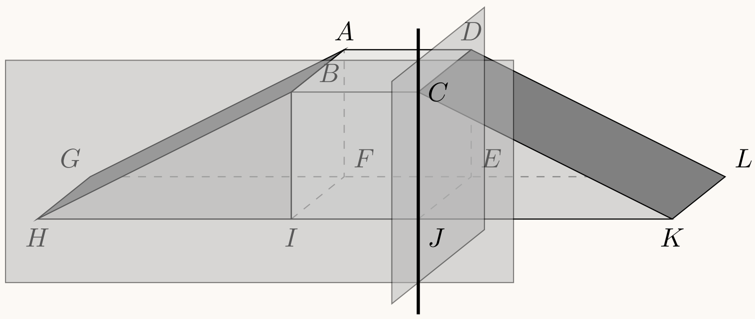
$$(x-a)^2+2ax=x^2-2\times a\times x+a^2+2ax=x^2-2ax+a^2+2ax=x^2+a^2$$

Resposta: **Opção** x^2+a^2

11.

11.1. Como o plano HIB contém toda a face anterior do sólido, e o plano JCD contém toda a face mais à direita do cubo (como podemos observar na figura ao lado), temos que a interseção dos planos HIB e JCD é:

a reta CJ



11.2. O triângulo $[IHB]$ é retângulo em H, porque é uma base de um dos prismas, e o lado $[HB]$ é a hipotenusa. Temos que, relativamente ao ângulo IHB, $[BI]$ é o cateto oposto, e o lado $[HI]$ é o cateto adjacente, pelo que, usando a definição de tangente, e substituindo as medidas conhecidas, temos:

$$\text{tg}\left(I\hat{H}B\right) = \frac{\overline{BI}}{\overline{HI}} \Leftrightarrow \text{tg}\, 32° = \frac{\overline{BI}}{5} \Leftrightarrow 5 \times \text{tg}\, 32° = \overline{BI}$$

Como $\text{tg}\, 32° \approx 0{,}625$, vem que: $\overline{BI} \approx 5 \times 0{,}625 \approx 3{,}125$

Como $[ABDCDEFIJ]$ é um cubo, então o seu volume, V_C, é

$$V_C = \overline{BI}^3 \approx 3{,}125^3 \approx 30{,}518 \text{ m}^3$$

Temos ainda que $\overline{AB} = \overline{BI}$, e como $[BHIFAG]$ é um prisma triangular reto, em que o triângulo $[IHB]$ é a base e $[HI]$ é a altura, então o volume do prisma, V_P, é

$$V_P = A_{[IHB]} \times \overline{AB} = \frac{\overline{HI} \times \overline{BI}}{2} \times \overline{AB} \approx \frac{5 \times 3{,}125}{2} \times 3{,}125 \approx 24{,}414 \text{ m}^3$$

Como os prismas $[BHIFAG]$ e $[CKJEDL]$ são geometricamente iguais, têm o mesmo volume, pelo que calculando o volume do sólido, V_S, como a soma dos três volumes, e arredondando o resultado às unidades temos:

$$V_S = V_P + V_C + V_P = 2 \times V_P + V_C \approx 2 \times 24{,}414 + 30{,}518 \approx 79 \text{ m}^3$$

12.

12.1. Como o ângulo AOC é um ângulo ao centro, e o ângulo ABC é um ângulo inscrito com o mesmo arco correspondente, temos que:

$$A\hat{B}C = \frac{A\hat{O}C}{2} = \frac{140}{2} = 70°$$

Resposta: **Opção** 70°

12.2. Como as retas AD e CD são tangentes à circunferência nos pontos A e C, respetivamente temos que os ângulos OAD e OCD são retos.
Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°, considerando o quadrilátero $[OADC]$ temos que

$$A\hat{D}C + O\hat{C}D + A\hat{O}C + O\hat{A}D = 360 \Leftrightarrow A\hat{D}C + 90 + 140 + 90 = 360 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A\hat{D}C + 320 = 360 \Leftrightarrow A\hat{D}C = 360 - 320 \Leftrightarrow A\hat{D}C = 40°$$

Como os ângulos ADE e ADC são suplementares, vem que

$$A\hat{D}E + A\hat{D}C = 180 \Leftrightarrow A\hat{D}E + 40 = 180 \Leftrightarrow A\hat{D}E = 180 - 40 \Leftrightarrow A\hat{D}E = 140°$$

13.

13.1. Como os triângulos $[ABC]$ e $[DBE]$ são semelhantes (porque têm dois ângulos em comum), podemos afirmar que a razão entre lados correspondentes é igual, e também é igual à razão dos perímetros, ou seja,

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AC}} = \frac{P_{[DBE]}}{P_{[ABC]}}$$

Logo, temos que

$$\frac{\overline{DE}}{12} = \frac{16}{48} \Leftrightarrow \overline{DE} = \frac{16 \times 12}{48} \Leftrightarrow \overline{DE} = 4$$

Resposta: **Opção** 4

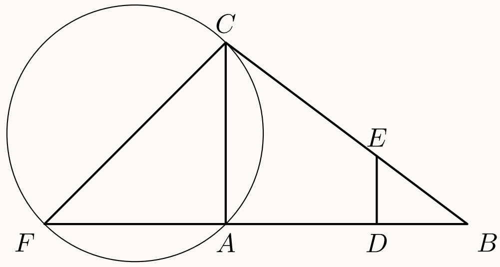
13.2. Como o triângulo $[AFC]$ é retângulo em A, então o lado $[FC]$ é um diâmetro da circunferência que passa nos pontos A, F e C

Temos ainda que $\overline{AC} = 12$ cm e que o triângulo $[AFC]$ é isósceles, pelo que também $\overline{AF} = 12$ cm, e recorrendo ao Teorema de Pitágoras podemos determinar a medida do segmento $[FC]$:

$$\overline{FC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AF}^2 \Leftrightarrow \overline{FC}^2 = 12^2 + 12^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{FC}^2 = 144 + 144 \Leftrightarrow \overline{FC}^2 = 288 \underset{\overline{BC}>0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \overline{FC} = \sqrt{288}$$



Assim, temos que o raio circunferência é $r = \frac{\sqrt{288}}{2}$, pelo que o comprimento da circunferência em centímetros, arredondado às unidades, é

$$P_\circ = 2\pi r = 2\pi \times \frac{\sqrt{288}}{2} = \pi \times \sqrt{288} \approx 53 \text{ cm}$$

14. Considerando a rotação de cada ponto, podemos construir o triângulo o transformado do triângulo $[ABC]$ por meio da rotação de centro no ponto O e amplitude $180°$ e verificar que é o triângulo representado na opção (C)

Resposta: **Opção C**