Prova final de Matemática - 3.º ciclo **(2012, 1.ª chamada)**

Proposta de resolução

1.

1.1. Como sabemos que metade dos jovens são portugueses e não existem jovens com dupla nacionalidade, temos que a probabilidade de selecionar um jovem espanhol terá de ser inferior a 50 %, (25 % ou 30 % de acordo com as hipóteses apresentadas).

Como saabemos que existem mais espanhóis que italianos, a probabilidade de selecionar um jovem espanhol terá de ser 30 % de acordo com as hipóteses apresentadas (se fosse 25 %, seria metade dos jovens espanhóis e italianos, o que significaria que existiam tantos espanhóis como italianos).

Resposta: **Opção** 30 %

1.2. Construindo uma tabela para identificar todos os pares de jovens compostos por um de cada tenda, que existem, temos

Tenda 2 \ Tenda 1	P	E	I
P	PP	PE	PI
E	PE	EE	EI

Assim, podemos concluir que escolhendo um jovem de cada tenda, existem 6 escolhas possíveis diferentes,e que em 2 delas os jovens são da mesma nacionalidade, pelo que, recorrendo à Regra de Laplace temos que a probabilidade de os dois jovens escolhidos terem a mesma nacionalidade, é

$$p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

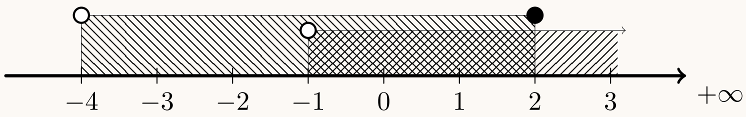
2. Considerando que a média dos três números naturais é 11, e designando por k o número maior que 1 e menor que a, temos que

$$\frac{1+k+a}{3} = 11 \Leftrightarrow 1+k+a = 11\times 3 \Leftrightarrow 1+k+a = 33 \Leftrightarrow k+a = 33-1 \Leftrightarrow k+a = 32 \Leftrightarrow a = 32-k$$

Assim temos que como $k > 1$, e $k+a = 32$, sendo k e a números naturais, o maior valor de a pode tomar corresponde ao menor valor que a pode tomar, ou seja $k = 2$ e

$$a = 32 - 2 = 30$$

3. Representando o conjunto $A \cap B$ na reta real, temos:



Assim temos que $A \cap B =]-1, +\infty[\cap]-4,2] =]-1,2]$

Resposta: **Opção** $]-1,2]$

4. Verificando que o extremo inferior de cada intervalo pode ser obtido, somando ao extremo inferior do intervalo anterior o número de ordem desse termo, temos:

1º termo	$[1,2]$	
2º termo	$[1+2,...]$	$[3,...]$
3º termo	$[3+3,...]$	$[6,...]$
4º termo	$[6+4,...]$	$[10,...]$
5º termo	$[10+5,...]$	$[15,...]$
6º termo	$[15+6,...]$	$[21,...]$
7º termo	$[21+7,...]$	$[28,...]$
8º termo	$[28+8,...]$	$[36,...]$

Verificando também que o extremo superior de cada intervalo pode ser obtido, somando ao extremo superior do intervalo anterior o número de ordem desse termo mais uma unidade, temos:

1º termo	$[1,2]$	
2º termo	$[...,2+2+1]$	$[...,5]$
3º termo	$[...,5+3+1]$	$[...,9]$
4º termo	$[...,9+4+1]$	$[...,14]$
5º termo	$[...,14+5+1]$	$[...,20]$
6º termo	$[...,20+6+1]$	$[...,27]$
7º termo	$[...,27+7+1]$	$[...,35]$
8º termo	$[...,35+8+1]$	$[...,44]$

Assim, podemos constatar que o oitavo termo desta sequência é o intervalo $[36,44]$

5. Usando as regras operatórias de potências, temos que:

$$n^{-3} = \frac{1}{n^3} \underset{n^3=k}{=} \frac{1}{k}$$

Resposta: **Opção** $\frac{1}{k}$

6. Simplificando a inequação, temos

$$-2x < 4 \Leftrightarrow 2x > -4 \Leftrightarrow x > \frac{-4}{2} \Leftrightarrow x > -2$$

Resposta: **Opção** $x > -2$

7.

7.1. Como c é o comprimento, em metros, do lado do quadrado $[ABCD]$, temos que

$$c^2 \text{ é a área do quadrado } [ABCD], \text{ ou seja, } c^2 = A_{[ABCD]}$$

Como $\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BE} = c + 2$, então

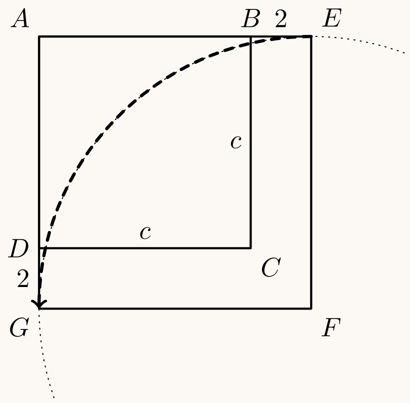
$$(c+2)^2 \text{ é a área do quadrado } [AEFG], \text{ ou seja, } (c+2)^2 = A_{[AEFG]}$$

E assim temos que

$$(c+2)^2 - c^2 = A_{[AEFG]} - A_{[ABCD]}$$

Logo, no contexto da situação descrita, $(c+2)^2 - c^2$ representa a área, em metros quadrados, da parte relvada do terreno.

7.2. Como $[AGFE]$ é um quadrado, uma rotação de 90°, de centro no ponto F transforma o ponto E no ponto G



8. Escrevendo a equação na fórmula canónica, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$(x+2)^2 = 3x^2 + 2x \Leftrightarrow x^2 + 2 \times 2x + 4 - 3x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 4x - 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$(a = -2,\ b = 2 \text{ e } c = 4)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-2)(4)}}{2(-2)} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{-2+6}{-4} \vee x = \frac{-2-6}{-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4}{-4} \vee x = \frac{-8}{-4} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$$

C.S.=$\{-1,2\}$

9. Resolvendo o sistema, vem

$$\begin{cases} x - \frac{y-1}{2} = 3 \\ 3x - y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \frac{y-1}{2} \\ 3\left(3 + \frac{y-1}{2}\right) - y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \frac{y-1}{2} \\ 9 + \frac{3y-3}{2} - y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \frac{y-1}{2} \\ \frac{9}{1}_{(2)} + \frac{3y-3}{2} - \frac{y}{1}_{(2)} = \frac{6}{1}_{(2)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \frac{y-1}{2} \\ \frac{18}{2} + \frac{3y-3}{2} - \frac{2y}{2} = \frac{12}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \frac{y-1}{2} \\ 18 + 3y - 3 - 2y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow: \begin{cases} x = 3 + \frac{y-1}{2} \\ 3y - 2y = 12 - 18 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \frac{-3-1}{2} \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \frac{-4}{2} \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2 \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$$

C.S $= \{(1, -3)\}$

10. Como $y = \frac{k}{x} \Leftrightarrow x \times y = k$, temos que o produto das variáveis é constante, ou seja as a relação entre as variáveis x e y é de proporcionalidade inversa e a constante de proporcionalidade é k

Resposta: **Opção** As variáveis x e y são inversamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é k

11. Como o gráfico representa uma função de proporcionalidade inversa, sabemos que $y = \frac{k}{x}$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Como sabemos que o ponto (8,4) pertence ao gráfico da função, vem que

$$4 = \frac{k}{8} \Leftrightarrow 4 \times 8 = k \Leftrightarrow 32 = k$$

Assim, substituíndo k por 32 e x por 2 na expressão $y = \frac{k}{x}$, podemos calcular a ordenada (y_2) do ponto do gráfico de abcissa 2 é:

$$y_2 = \frac{32}{2} \Leftrightarrow y_2 = 16$$

12.

12.1. Temos que $[BC]$ é uma aresta do cubo $[BCDEKLMN]$, pelo que o respetivo volume é

$$V_{[BCDEKLMN]} = \overline{BC}^3 = a^3$$

Por outro lado, como $\overline{AB} = 2\overline{BC} = 2a$, como $[BE]$ também é uma aresta do cubo $\overline{BE} = a$ e ainda como $[BL]$ também é uma aresta do cubo $\overline{BI} = \frac{1}{3}\overline{BL} = \frac{1}{3} \times a = \frac{a}{3}$, vem que o volume do paralelepípedo $[ABEFGHIJ]$ é

$$V_{[ABEFGHIJ]} = \overline{AB} \times \overline{BE} \times \overline{BI} = 2a \times a \times \frac{a}{3} = \frac{2a^3}{3}$$

Logo, como o volume total do sólido, V_T, é a soma dos volumes do cubo e do paralelepípedo temos que

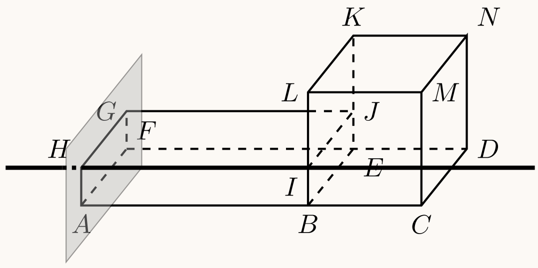
$$V_T = a^3 + \frac{2a^3}{3} = \frac{a^3}{1}_{(3)} + \frac{2a^3}{3} = \frac{3a^3}{3} + \frac{2a^3}{3} = \frac{5a^3}{3}$$

Igualando a expressão do volume total ao seu valor numérico (25), e resolvendo a equação, podemos determinar o valor exato de a:

$$\frac{5a^3}{3} = 25 \Leftrightarrow 5a^3 = 25 \times 3 \Leftrightarrow a^3 = \frac{75}{5} \Leftrightarrow a^3 = 15 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{15}$$

12.2. Como o plano FGH contém a face $[AFGH]$ do paralelepípedo, a aresta $[HI]$ é perpendicular a esta face (como se pode observar na figura ao lado). Assim, uma reta que passe no ponto I e seja perpendicular ao plano FGH é, por exemplo,

a reta HI



13.

13.1. Como os triângulos $[ABC]$ e $[ADE]$ têm um ângulo em comum, e são ambos retângulos, têm dois pares de ângulos com a mesma amplitude, o que é suficiente para afirmar que são semelhantes, pelo critério AA.
Como os triângulos são semelhantes, podemos afirmar que a razão entre lados correspondentes é igual, ou seja,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$$

Logo, substituindo os valores dados, vem que:

$$\frac{\overline{AB}}{20} = \frac{40}{25} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{40 \times 20}{25} \Leftrightarrow \overline{AB} = 32$$

E podemos calcular $\overline{BC}$, recorrendo ao Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow 40^2 = 32^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow 1600 - 1024 = \overline{BC}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 576 = \overline{BC}^2 \underset{\overline{BC}>0}{\Rightarrow} \sqrt{576} = \overline{BC} \Leftrightarrow 24 = \overline{BC}$$

13.2. Como $C\hat{A}B = D\hat{A}E = 37°$ e $A\hat{B}C = 90°$, temos que

$$A\hat{C}B + C\hat{A}B + A\hat{B}C = 180 \Leftrightarrow A\hat{C}B + 37 + 90 = 180 \Leftrightarrow A\hat{C}B = 180 - 90 - 37 \Leftrightarrow A\hat{C}B = 53°$$

Como o ângulo ACB é o ângulo inscrito na circunferência relativo ao arco PQ, temos que

$$\overset{\frown}{PQ} = 2 \times 53 = 106°$$

Como a soma das amplitudes dos arcos PQ e PCQ é $360°$ podemos calcular a amplitude, em graus, do arco PCQ :

$$P\overset{\frown}{C}Q + \overset{\frown}{PQ} = 360 \Leftrightarrow P\overset{\frown}{C}Q + 106 = 360 \Leftrightarrow P\overset{\frown}{C}Q = 360 - 106 \Leftrightarrow P\overset{\frown}{C}Q = 254°$$

13.3. Como $[ACB]$ é um triângulo retângulo em B, e relativamente ao ângulo ACB, temos que $[AC]$ é a hipotenusa, $[BC]$ é o cateto adjacente e $[AB]$ é o cateto oposto, pela definição das razões trigonométricas, temos que

$$\operatorname{sen} A\hat{C}B = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \quad \text{e} \quad \cos A\hat{C}B = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

Resposta: **Opção** $\cos A\hat{C}B = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$

14. Como o cubo é parcialmente mergulhado no recipiente com tinta, a uma das faces fica completamente pintada, outra mantém-se branca e as restantes 4 ficam parcialmente pintadas.

- Podemos **rejeitar** a **Planificação A** porque não tem nenhuma face completamente pintada.
- Podemos **rejeitar** a **Planificação D** porque a completamente pintada e a face totalmente branca são adjacentes e não opostas como no cubo mergulhado no recipiente.
- Podemos **rejeitar** a **Planificação B** porque a parte pintada das faces parcialmente pintadas não são adjacentes à face totalmente pintada como no cubo mergulhado no recipiente.

A Planificação C cumpre todas as condições que as restantes não verificam, pelo que é a planificação do cubo depois de retirado do recipiente.

Resposta: **Opção** Planificação C