Prova final de Matemática - 3.º ciclo (2011, Época especial)

Proposta de resolução

1\.

1.1. Construindo uma tabela para identificar todos os pares de pares de bolas que existem, e calculando o produto dos dois números, temos

	1	2	3	4
1	-	$1\times 2=2$	$1\times 3=3$	$1\times 4=4$
2	-	-	$2\times 3=6$	$2\times 4=8$
3	-	-	-	$3\times 4=12$
4	-	-	-	-

Como a extração das duas bolas é simultânea, não existe a possibilidade de extrair duas bolas com o mesmo número, pelo que os produtos diferentes que podemos obter são

$$2, 3, 4, 6, 8 \text{ e } 12$$

ou seja, podemos obter 6 produtos diferentes.

1.2. Como o João retirou a bola roxa e não a voltou a colocar no saco, o conteúdo do saco passou a ser de 2 bolas azuis e 1 bola verde.
Assim, para retirar uma bola azul na segunda extração existem 3 casos possíveis (as 3 bolas do saco) e 2 casos favoráveis, as duas bolas azuis), pelo que, recorrendo à Regra de Laplace, a probabilidade é

$$p=\frac{2}{3}$$

2\. Como o valor calculado pela Inês para a média das idades é 14,5, e pela observação do gráfico temos que existem 5 pessoas com 13 anos, 40 com 14 e 22 com 15, podemos calcular o número de pessoas com 16 anos:

$$\frac{5\times 13+40\times 14+22\times 15+k\times 16}{5+40+22+k}=14{,}5 \Leftrightarrow \frac{955+16k}{67+k}=14{,}5 \Leftrightarrow 955+16k=14{,}5(67+k) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 955+16k=971{,}5+14{,}5k \Leftrightarrow 16k-14{,}5k=971{,}5-955 \Leftrightarrow 1{,}5k=16{,}5 \Leftrightarrow k=\frac{16{,}5}{1{,}5} \Leftrightarrow k=11$$

3. Analisando cada uma das afirmações, temos que

   - a afirmação da opção (A) é falsa porque qualquer quociente de números inteiros é um número racional.
   - a afirmação da opção (B) é falsa porque 2π é uma dízima infinita não periódica, ou seja, um número irracional, pelo que $2\pi \notin \mathbb{Q}$.
   - a afirmação da opção (C) é verdadeira porque 1,32(5) é uma dízima infinita periódica, ou seja, é um número racional: $1{,}32(5) \in \mathbb{Q}$
   - a afirmação da opção (D) é falsa porque $\sqrt{16} = 4$, ou seja, não é uma dízima infinita não periódica, logo é um número irracional, $\sqrt{16} \in \mathbb{Q}$.

   Resposta: **Opção** 1,32(5) é um número racional

4. Observando a tabela podemos concluir que cada termo é obtido adicionado 3 unidades ao termo anterior, pelo que podemos comparar a sequência com a sequência de termo geral $3n$, e perceber que adicionando 2 unidades aos termos da sequência de termo geral $3n$ obtemos os termos da sequência dada.

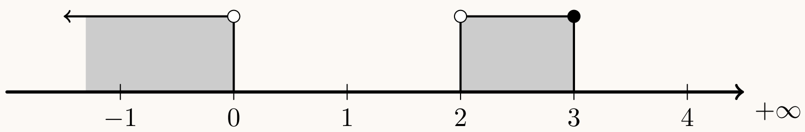
	1º termo	**2º termo**	**3º termo**	**4º termo**	...	**12.º termo**	...
	5	8	11	14	...	38	...
$3n$	3	6	9	12	...	36	...
$3n+2$	3+2=5	6+2=8	9+2=11	12+2=14	...	36+2=38	...

   Como o termo geral da sequência é $3n+2$ podemos averiguar se existe uma ordem, n, que corresponda ao termo 512, resolvendo a equação $3n+2=512$:

$$3n+2=512 \Leftrightarrow 3n=512-2 \Leftrightarrow 3n=510 \Leftrightarrow n=\frac{510}{3} \Leftrightarrow n=170$$

   Logo podemos afirmar que sim, o 170º termo da sequência é 512

5. Representando o conjunto A, temos:



   Assim, podemos verificar que, de entre os valores apresentados apenas o 3 pertence ao conjunto A

   Resposta: **Opção** 3

6. Podemos resolver o sistema para encontrar a solução, ou então substituir as soluções no sistema, para identificar qual delas verifica as duas equações do sistema simultaneamente:

- Opção $(0,-3)$: $\begin{cases} 3(0)-2(-3)=6 \\ 0+2(-3)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0+6=6 \\ 0-6=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6=6 \\ -6=2 \end{cases}$ (Proposição falsa)
- Opção $(2{,}0)$: $\begin{cases} 3(2)-2(0)=6 \\ 2+2(0)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6-0=6 \\ 2+0=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6=6 \\ 2=2 \end{cases}$ (Proposição verdadeira)
- Opção $(4{,}3)$: $\begin{cases} 3(4)-2(3)=6 \\ 4+2(3)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12-6=6 \\ 4+6=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6=6 \\ 10=2 \end{cases}$ (Proposição falsa)
- Opção $(0,-1)$: $\begin{cases} 3(4)-2(-1)=6 \\ 4+2(-1)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12+2=6 \\ 4-2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14=6 \\ 2=2 \end{cases}$ (Proposição falsa)

Resposta: **Opção** $(2{,}0)$

7. Fazendo o desenvolvimento do caso notável, escrevendo a equação na fórmula canónica e usando a fórmula resolvente, vem:

$$(x-2)^2-9=0 \Leftrightarrow x^2-2\times 2x+2^2-9=0 \Leftrightarrow x^2-4x+4-9=0 \Leftrightarrow x^2-4x-5=0 \Leftrightarrow$$

$(a=1,\ b=-4 \text{ e } c=-5)$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(-5)}}{2(1)} \Leftrightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16+25}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{36}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{4+6}{2} \vee x=\frac{4-6}{2} \Leftrightarrow x=\frac{10}{2} \vee x=\frac{-2}{2} \Leftrightarrow x=5 \vee x=-1$$

C.S.$=\{-1{,}5\}$

8. Resolvendo a inequação, temos

$$\frac{1}{3}(x-6)\geq\frac{x}{2}-1 \Leftrightarrow \frac{x}{3}_{(2)}-\frac{6}{3}_{(2)}\geq\frac{x}{2}_{(3)}-\frac{1}{1}_{(6)} \Leftrightarrow \frac{2x}{6}-\frac{12}{6}\geq\frac{3x}{6}-\frac{6}{6} \Leftrightarrow 2x-12\geq 3x-6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x-3x\geq -6+12 \Leftrightarrow -x\geq 6 \Leftrightarrow x\leq -6$$

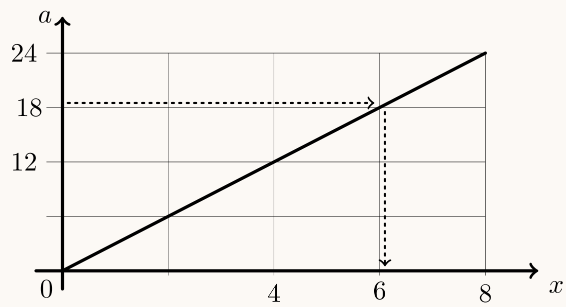
C.S.$=]-\infty,-6]$

9.

9.1. Como a unidade representada no eixo vertical corresponde a 6, podemos identificar o valor 18 entre o 12 e o 24

Assim, no gráfico podemos identificar o valor do objeto que tem por imagem 18, ou seja o valor entre 4 e 8, que é 6

Assim, no caso em que a área do triângulo $[APC]$ é igual a 18, temos que $\overline{PC}=6$



9.2. Usando um ponto do gráfico, por exemplo o ponto de coordenadas (4,12), temos que se $\overline{PC} = 4$ então a área do triângulo $[APC]$ é $A_{[APC]} = 12$
Como o lado $[PC]$ é perpendicular ao lado $[AC]$, podemos considerar um deles a base e o outro a altura do triângulo, e assim, substituindo os valores identificados, temos

$$A_{[APC]} = 12 \Leftrightarrow \frac{\overline{AC} \times \overline{PC}}{2} = 12 \Leftrightarrow \frac{\overline{AC} \times 4}{2} = 12 \Leftrightarrow \overline{AC} \times 2 = 12 \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{12}{2} \Leftrightarrow \overline{AC} = 6$$

9.3. Como $\overline{AC} = 6$ e $[AC]$ é a base do triângulo, e como a altura do triângulo é $[PC]$ e $\overline{PC} = x$ então a área (a) do triângulo $[APC]$ é dada por

$$a = \frac{\overline{AC} \times \overline{PC}}{2} \Leftrightarrow a = \frac{6 \times x}{2} \Leftrightarrow a = 3x$$

Resposta: **Opção** $a = 3x$

10.

10.1. Como o ângulo CAD é o ângulo inscrito na circunferência relativo ao arco CD, e $C\hat{A}D = 36°$ temos que

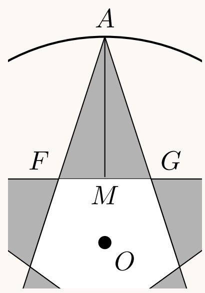
$$\overset{\frown}{CD} = 2 \times 36 = 72°$$

Resposta: **Opção** 72°

10.2. Como $\overline{AF} = \overline{AG}$, o triângulo $[AFG]$ é isósceles, pelo que, considerando M o ponto médio do lado $[FG]$, podemos considerar o triângulo $[AMF]$, retângulo em M

Temos ainda que o lado $[AM]$ bisseta o ângulo FAG (que coincide com o ângulo CAD), pelo que $F\hat{A}M = \dfrac{36}{2} = 18°$

Desta forma, o lado $[AF]$ é a hipotenusa do triângulo $[AMF]$, e relativamente ao ângulo FAM, $[AM]$ é o cateto oposto, pelo que, usando a definição de seno, temos:



$$\text{sen}\,(F\hat{A}M) = \frac{\overline{FM}}{\overline{AF}} \Leftrightarrow \text{sen}\,18° = \frac{\overline{FM}}{16} \Leftrightarrow 16 \times \text{sen}\,18° = \overline{FM}$$

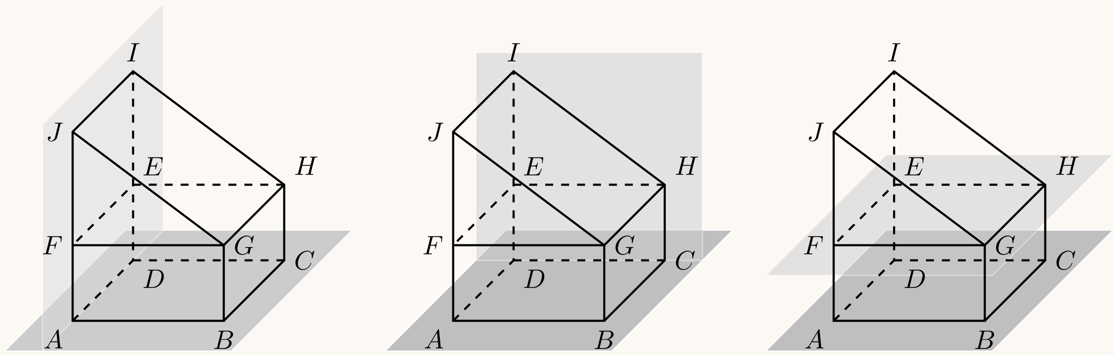
Como sen 18° ≈ 0,31, vem que: $\overline{FM} \approx 16 \times 0{,}31 \approx 4{,}94$ cm

Como M é o ponto médio de $[FG]$, calculando $\overline{FG}$ e arredondando o resultado às décimas, temos

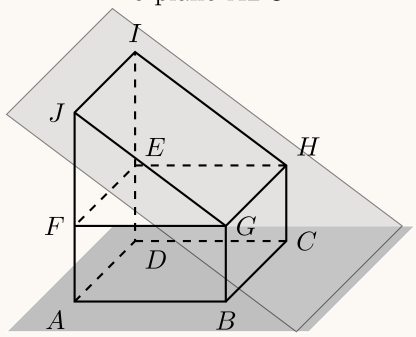
$$\overline{FG} = 2 \times \overline{FM} \approx 2 \times 4{,}94 \approx 9{,}9 \text{ cm}$$

11.

11.1. Os planos IJF e IDC são concorrentes, mas também perpendiculares, com o plano ABC; e o plano FGH é paralelo ao plano ABC



De entre as opções apresentadas o plano IJG é o único plano concorrente, não perpendicular, com o plano ABC



Resposta: **Opção** IJG

11.2. O volume do sólido $[ABCDIJGH]$ pode ser obtido pela soma dos volumes do prisma de bases quadradas $[ABCDEFGH]$ e do prisma triangular $[EFGHIJ]$:

$$V_{[ABCDIJGH]} = V_{[ABCDEFGH]} + V_{[EFGHIJ]}$$

Como $[ABCD]$ é um quadrado, então $\overline{BC} = \overline{AB} = 8$ cm, e $\overline{AF} = 4$ cm, pelo que o volume do prisma é

$$V_{[ABCDEFGH]} = \overline{BC} \times \overline{AB} \times \overline{AF} = 8 \times 8 \times 4 = 256 \text{ cm}^3$$

Calculando a área da base do prisma triângular, por exemplo, a área do triângulo $[FGJ]$, como $\overline{FG} = \overline{AB} = 8$ cm e $\overline{FJ} = 7$ cm, a área da base é

$$A_{[FGJ]} = \frac{\overline{FG} \times \overline{FJ}}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = \frac{56}{2} = 28 \text{ cm}^2$$

E assim, como $\overline{FE} = \overline{BC} = \overline{AB} = 8$ cm, o volume do prisma triângular é

$$V_{[EFGHI]} = A_{[FGJ]} \times \overline{FE} = 28 \times 8 = 224 \text{ cm}^3$$

E, somando os volumes dos dois prismas, temos o volume do sólido:

$$V_{[ABCDIJGH]} = V_{[ABCDEFGH]} + V_{[EFGHIJ]} = 256 + 224 = 480 \text{ cm}^3$$

12.

12.1. Como os triângulos $[OAB]$ e $[OCD]$ têm um ângulo em comum, e os segmentos $[AB]$ e $[CD]$ são paralelos, definem sobre a mesma reta (OC) ângulos iguais, e assim os triângulos, têm dois pares de ângulos com a mesma amplitude, o que é suficiente para afirmar que são semelhantes, pelo critério AA.
Como os triângulos são semelhantes, podemos afirmar que a razão entre lados correspondentes é igual, ou seja,

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}}$$

Logo, substituindo os valores dados, vem que:

$$\frac{\overline{OC}}{5} = \frac{18}{12} \Leftrightarrow \overline{OC} = \frac{15 \times 5}{12} \Leftrightarrow \overline{OC} = 7{,}5$$

E podemos calcular $\overline{CD}$, recorrendo ao Teorema de Pitágoras:

$$\overline{CD}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2 \Leftrightarrow \overline{CD}^2 = 7{,}5^2 + 18^2 \Leftrightarrow \overline{CD}^2 = 56{,}25 + 324 \underset{\overline{CD}>0}{\Rightarrow} \overline{CD}^2 = \sqrt{380{,}25} = \overline{BC} \Leftrightarrow \overline{CD} = 19{,}5$$

12.2. A afirmação é verdadeira porque se o ponto B pertencesse à circunferência de centro no ponto O e que passa no ponto A, então os pontos A e B estariam à mesma distância do ponto O $(\overline{OA} = \overline{OB})$.

Como $\overline{OA} = 5$ e $\overline{OB} = 12$, então $\overline{OA} \neq \overline{OB}$, pelo que os ponto B não está sobre a circunferência de centro no ponto O e que passa no ponto A

13. Como os ângulos internos de um hexágono regular têm 120° de amplitude, o transformado do ponto B por uma rotação de centro em A e amplitude 120° é o ponto F

Traçando retas perpendiculares pelo ponto A podemos observar que o ângulo DAG é reto, e que o ângulo CAD tem amplitude de 30°, pelo que o ângulo CAG tem amplitude de 120°, ou seja, o transformado do ponto C por uma rotação de centro em A e amplitude 120° é o ponto G

Assim, o transformado do segmento $[BC]$ por uma rotação de centro em A e amplitude 120° é o segmento $[FG]$