Prova final de Matemática - 3.º ciclo **(2011, 2.ª chamada)**

Proposta de resolução

1.

1.1. A função de proporcionalidade direta é a representada por parte de uma reta que contém a origem. Como a reta que contém a origem também contém o ponto de coordenadas (60,36), e a constante de proporcionalidade k, dessa função verifica a condição $k = \frac{y}{x}$, então substituindo as coordenadas do ponto conhecido, temos

$$k = \frac{36}{60} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

1.2. Pela observação do gráfico podemos verificar que, como o Carlos interrompeu o abastecimento, a função que representa o abastecimento do carro do Carlos, é o gráfico que mantém constante a quantidade de gasolina entre os 20 e os 75 segundos.
Assim, podemos verificar que no final do abastecimento (90 segundos) o Carlos tinha abastecido o seu carro com 19 litros de gasolina.

Calculando o preço a pagar pelos 19 litros, sem considerar o desconto, vem

$$19 \times 1{,}480 = 28{,}12 \text{ €}$$

Como o Carlos beneficiou de um desconto de 5%, ou seja $28{,}12 \times 0{,}05$, o total a pagar é

$$28{,}12 - 28{,}12 \times 0{,}05 = 28{,}12 - 1{,}406 = 26{,}714 \text{ €}$$

Assim, o valor a pago pelo Carlos foi de 26,71 €

2. Resolvendo a inequação, temos

$$\frac{12}{5}x - 4 \geq \frac{5}{2}(x-3) \Leftrightarrow \frac{12x}{5}_{(2)} - \frac{4}{1}_{(10)} \geq \frac{5x}{2}_{(5)} - \frac{15}{2}_{(5)} \Leftrightarrow \frac{24x}{10} - \frac{40}{10} \geq \frac{25x}{10} - \frac{75}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24x - 40 \geq 25x - 75 \Leftrightarrow 24x - 25x \geq -75 + 40 \Leftrightarrow -x \geq -35 \Leftrightarrow x \leq 35$$

C.S.$=]-\infty{,}35]$

3. Escrevendo a equação na fórmula canónica, e usando a fórmula resolvente, vem:

$(x+3)^2 - 3 = 2x^2 + x \Leftrightarrow x^2 + 2\times 3\times x + 3^2 - 3 = 2x^2 + x \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 - 3 - 2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow$

$(a = -1,\ b = 5 \text{ e } c = 6)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(-1)(6)}}{2(-1)} \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-5+7}{-2} \vee x = \frac{-5-7}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{-2} \vee x = \frac{-12}{-2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 6$$

C.S.$=\{-1{,}6\}$

4. Como as grandezas a e b são inversamente proporcionais se $a \times b = k$, $k \in \mathbb{R}$, então as tabelas A, B e D não traduzem relações de proporcionalidade inversa entre as grandezas a e b:

   - Tabela A: $5 \times 10 = 50$ e $10 \times 20 = 200$, logo $a \times b$ não é constante
   - Tabela B: $5 \times 25 = 125$ e $10 \times 20 = 200$, logo $a \times b$ não é constante
   - Tabela D: $5 \times 10 = 50$ e $10 \times 10 = 100$, logo $a \times b$ não é constante

   Relativamente à Tabela C, podemos observar que $a \times b$ é constante, ou seja, a tabela traduz uma reação de proporcionalidade inversa:

$$5 \times 6 = 10 \times 3 = 15 \times 2 = 20 \times 1{,}5 = 30$$

   Resposta: **Opção** Tabela C

5. Podemos substituir as soluções no sistema, para identificar qual delas verifica as duas equações do sistema simultaneamente, ou então, resolver o sistema para encontrar a solução:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x = 1 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + y \\ 2(2+y) = 1 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + y \\ 4 + 2y = 1 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + y \\ 2y + y = 1 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + y \\ 3y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + y \\ y = \dfrac{-3}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + (-1) \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

   Resposta: **Opção** $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

6.

   6.1. Observando os termos da sequência, podemos observar que no termo de ordem n, existem n bolas pretas, o triplo de bolas brancas $(3n)$ e ainda uma bola branca adicional colocada em baixo.

   Assim, para construir o 7º termo da sequência são necessárias 7 bolas pretas, 3×7 bolas brancas, e 1 bola branca adicional, num total de

$$7 + 3 \times 7 + 1 = 7 + 21 + 1 = 29 \text{ bolas}$$

   6.2. Como cada termo da sequência, tem n bolas pretas, $3n$ bolas brancas e ainda uma bola branca adicional colocada em baixo, descontando a bola branca adicional, cada termo pode ser dividido em 4 partes, sendo uma dessas partes constítuida por bolas brancas e as restantes 3 partes formada por bolas brancas.
   Assim, descontando a bola branca adicional, temos

$$493 - 1 = 492$$

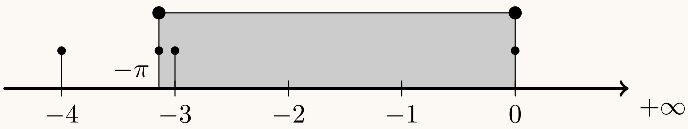
   Dividindo as 492 em 4 partes, determinamos o número de bolas pretas:

$$\frac{492}{4} = 123 \text{ bolas pretas}$$

   E, retirando ao total o número de bolas pretas, calculamos o número de bolas brancas do termo com 493 bolas:

$$493 - 123 = 370 \text{ bolas brancas}$$

7. Como $-\pi \approx -3{,}1416$, representando na reta real o intervalo $[-\pi,0]$, e os números das hipóteses apresentadas, temos:



Assim, podemos verificar que, de entre as opções apresentadas, -4 é o menor inteiro, mas não pertence ao intervalo indicado e $-\pi$ é o menor número que pertence ao intervalo, mas não é um número inteiro, pelo que a resposta correta é -3

Resposta: **Opção** -3

8. O menor número divisível por 2, 3 e 5 simultaneamente é $2 \times 3 \times 5 = 30$ e o número seguinte com a mesma propriedade é $2 \times 30 = 60$

Assim, de entre os números naturais de 1 a 50, apenas um deles (o 30) é divisível por 2, 3 e 5 simultaneamente, ou seja a probabilidade pedida pode ser calculada recorrendo à Regra de Laplace, verificando a existência de 1 caso favorável e 50 casos possíveis, pelo que a probabilidade é $\frac{1}{50}$

9.

9.1. Pela observação do gráfico podemos afirmar que 3 alunos não leram qualquer livro, 7 alunos leram apenas 1 livro, 5 alunos leram 2 livros, 4 alunos leram 3 livros, 3 alunos leram 4 livros e também houve 3 alunos que leram 5 livros, o que totaliza 25 alunos na turma.
Assim, calculando a média, $\overline{x}$, do número de livros que cada aluno leu, temos

$$\overline{x} = \frac{3\times 0 + 7\times 1 + 5\times 2 + 4\times 3 + 3\times 4 + 3\times 5}{3+7+5+4+3+3} = \frac{0+7+10+12+12+15}{25} = \frac{56}{25} = 2{,}24 \text{ livros}$$

9.2. Como o engano do António consistiu em considerar alguns alunos como tendo lido dois livros, quando na realidade tinham lido três, as frequências dos valores 0, 1, 4 e 5 devem permanecer iguais, ou seja, as barras relativas a estes valores devem ser iguais às barras do gráfico do António, pelo que podemos excluir os gráficos (B) e (D).

Como existem 25 alunos, ordenando os alunos em função do número de livros lidos, e identificando o aluno da posição 13 da lista ordenada temos:

- Gráfico A: $\underbrace{0\ 0\ 0}_{3}\ \underbrace{1\ 1\ ...\ 1\ 1}_{7}\ \underbrace{2\ 2}_{2}\ \underbrace{2}_{\tilde{x}}\ 3\ 3\ ...$
- Gráfico C: $\underbrace{0\ 0\ 0}_{3}\ \underbrace{1\ 1\ ...\ 1\ 1}_{7}\ \underbrace{2\ 2}_{2}\ \underbrace{3}_{\tilde{x}}\ 3\ 3\ ...$

Assim, como sabemos que a mediana é 3, o único gráfico que verifica as duas condições do enunciado é o gráfico C.

Resposta: **Opção** Gráfico C

10. Como $[EFGH]$ é um quadrado, e $\overline{FG} = \overline{AB} = 4$ m, então, temos que $\overline{GH} = \overline{FG} = 4$ m e assim, recorrendo ao Teorema de Pitágoras, podemos calcular o diâmetro d da base do cone:

$$d^2 = \overline{FG}^2 + \overline{GH}^2 \Leftrightarrow d^2 = 4^2 + 4^2 \Leftrightarrow d^2 = 16 + 16 \Leftrightarrow d^2 = 32 \underset{d>0}{\Rightarrow} d = \sqrt{32} \text{ m}$$

E assim temos que o raio, r, da base do cone é $r = \dfrac{\sqrt{32}}{2} \approx 2{,}83$ m

Calculando a medida da área da base do cone temos

$$A_\circ = \pi \times r^2 \approx \pi \times 2{,}83^2 \approx 25{,}16 \text{ m}^2$$

Como a medida da altura do cone é $\overline{IJ} = 3$ m, calculando o volume do cone temos

$$V_C = \frac{1}{3} \times A_\circ \times \overline{IJ} = \frac{1}{3} \times 25{,}16 \times 3 = 25{,}16 \text{ m}^3$$

Como $[ABCD]$ é um quadrado, então $\overline{BC} = \overline{AB} = 4$, temos que o volume do prisma é dado por

$$V_P = \overline{AB} \times \overline{BC} \times \overline{BG} = 4 \times 4 \times \overline{BG} = 16 \times \overline{BG} \text{ m}^3$$

Como o volume total do sólido é 57 m^3, vem que

$$V_C + V_P = 57 \Leftrightarrow 25{,}16 + 16 \times \overline{BG} = 57 \Leftrightarrow 16 \times \overline{BG} = 57 - 25{,}16 \Leftrightarrow \overline{BG} = \frac{31{,}84}{16} \Leftrightarrow \overline{BG} = 1{,}99 \text{ m}$$

Assim a altura do prisma ($\overline{BG}$) em metros, arredondada às unidades é 2 m

11.

11.1. Como o ângulo BDC é o ângulo inscrito relativo ao arco BC, temos que $B\hat{D}C = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \dfrac{80}{2} = 40°$
Como o ângulo BDC e o ângulo PDC são o mesmo ângulo e como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, podemos calcular a amplitude do ângulo DCP:

$$D\hat{C}P + D\hat{P}C + P\hat{D}C = 180 \Leftrightarrow D\hat{C}P + 85 + 40 = 180 \Leftrightarrow D\hat{C}P = 180 - 85 - 40 \Leftrightarrow D\hat{C}P = 55°$$

Como o ângulo DCP e o ângulo DCA são o mesmo ângulo e como os ângulos DCA e DBA são ambos ângulos inscritos relativos ao arco DA, então

$$D\hat{B}A = D\hat{C}A = D\hat{C}P = 55°$$

11.2. Como os triângulos $[ABP]$ e $[DCP]$ são semelhantes, e $\overline{DP} = 2\overline{AP} \Leftrightarrow \dfrac{\overline{DP}}{\overline{AP}} = 2$, temos que a razão de semelhança é 2.
Como a razão das áreas de figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança das figuras, temos que $\dfrac{A_{[DCP]}}{A_{[ABP]}} = 2^2$
Logo, substituindo o valor da área do triângulo $[ABP]$, vem:

$$\frac{A_{[DCP]}}{6} = 2^2 \Leftrightarrow A_{[DCP]} = 4 \times 6 \Leftrightarrow A_{[DCP]} = 24$$

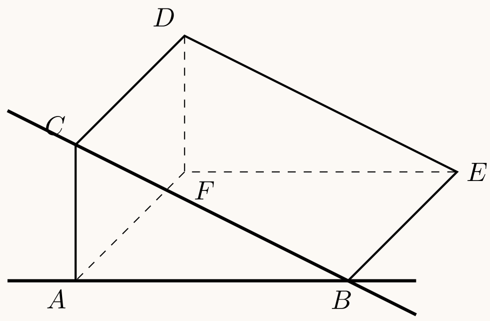
Resposta: **Opção** 24

12.

12.1. Escolhendo uma mesma letra na definição das duas retas, é suficiente para garantir que as retas têm esse ponto em comum, ou seja são concorrentes.

Ainda assim existem várias escolhas possíveis, por exemplo:

a reta BC e a reta BA



12.2. Como as faces triangulares do prisma são triângulos retângulos, podemos excluir a planificação A e a planificação B.

Como, o lado menor das faces triangulares é concorrente com as faces retangulares e não com as faces quadradras, também podemos excluir a planificação C.

Resposta: **Opção** Panificação D

12.3. Como o triângulo $[ABC]$ é retângulo em A, então o lado $[AC]$ é o cateto oposto ao ângulo CBA e o lado $[AB]$ é o cateto adjacente ao mesmo ângulo, pelo que, usando a definição de tangente de um ângulo, temos:

$$\text{tg}\left(C\hat{B}A\right) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \text{tg}\,30^\circ = \frac{8}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{8}{\text{tg}\,30^\circ}$$

Como $\text{tg}\,30^\circ \approx 0{,}58$, vem que: $\overline{AB} \approx \dfrac{8}{0{,}58} \approx 13{,}79$

Definindo o lado $[AB]$ como a base e o lado $[AC]$ como a altura (ou vice-versa), a área do triângulo $[ABC]$, em cm^2, arredondada às unidades é

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{2} \approx \frac{13{,}79 \times 8}{2} \approx 55 \text{ cm}^2$$

13.