Prova final de Matemática - 3.º ciclo **(2011, 1.ª chamada)**

Proposta de resolução

1. Como os números pares superiores a 3 que estão inscritos nas bolas são o 4 (em 2 bolas) e 6 (em 3 bolas), existem 5 bolas com a característica identificada, ou seja 5 casos favoráveis.
   Como o saco tem $3+3+1+2+1+3=13$ bolas no total, existem 13 casos possíveis.
   Assim, recorrendo à Regra de Laplace, temos que a probabilidade de retirar uma bola do saco, ao acaso, e nela estar inscrito um número par superior a 3 é

$$p=\frac{5}{13}$$

2. Como sabemos que a probabilidade de selecionar, ao caso, um aluno da turma e ele ser rapaz é $\frac{2}{3}$, então podemos verificar que

   - em cada 3 alunos da turma 2 são rapazes
   - por cada rapariga, existem 2 rapazes
   - o número de rapazes é o dobro do número de raparigas

   Como existem, na turma, 6 raparigas, logo o número de rapazes é

$$2\times 6=12$$

   Resposta: **Opção** 12

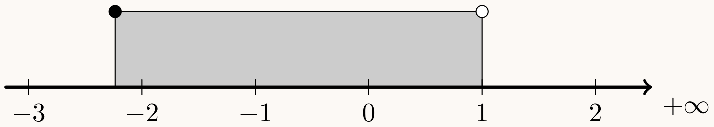
3. Designando por S a soma das idades dos 4 irmãos da Beatriz, para que a média das alturas seja 1,25 temos que

$$\frac{S}{4}=1{,}25 \Leftrightarrow S=1{,}25\times 4 \Leftrightarrow S=5$$

   Assim, calculado, em metros, a média das alturas dos 5 irmãos (incluindo a Beatriz), temos

$$\overline{x}=\frac{S+1{,}23}{5}=\frac{5+1{,}23}{5}=\frac{6{,}23}{5}=1{,}246 \text{ m}$$

4. Como $-\sqrt{5} \approx -2{,}2361$, representando na reta real o conjunto $A = [-\sqrt{5},1[$, temos:



Assim, podemos verificar que, como o intervalo é aberto no limite superior, $1 \notin A$, pelo que

$$A \cap \mathbb{Z} = \{-2, -1{,}0\}$$

5. Usando as regras operatórias de potências, temos que:

$$a^6 = a^{4+2} = a^4 \times a^2$$

Resposta: **Opção** $a^4 \times a^2$

6. Como a Catarina agrupou os fósforos em grupos de 3 e depois em grupos de 5 e não sobrou qualquer fósforo, então o número total de fósforos é múltiplo de 3 e também de 5, pelo que é múltiplo de 15.

Como a caixa tinha menos de 50 fósforos, é o total é um número múltiplo de 15, só poderiam ser 15, 30 ou 45.

Como o agrupamento em grupos de 4, originou a sobra de 1 fósforo, podemos concluir que o número de fósforos na caixa era de 45, pois $15 = 4 \times 3 + 3$ (o agrupamento de 15 fósforos em grupos de 4 teria originado a sobra de 3 fósforos) e $30 = 4 \times 7 + 2$ (o agrupamento de 30 fósforos em grupos de 4 teria originado a sobra de 2 fósforos).
Finalmente podemos verificar que $45 = 4 \times 11 + 1$ (o agrupamento de 45 fósforos em grupos de 15 originou a sobra de 1 fósforo).

7. Fazendo o desenvolvimento do caso notável, e simplificando, vem

$$(x-1)^2 - x^2 = x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2 - x^2 = x^2 - 2x + 1 - x^2 = -2x + 1$$

Resposta: **Opção** $-2x + 1$

8. Numa fase inicial, a altura que a água atinge na régua aumenta proporcionalmente ao tempo.

Quando a altura que a água atinge iguala a altura da placa, a água que entra no aquário irá "verter"para a parte do aquário que está isolada pela placa, fazendo com que a altura que a água atinge na régua se mantenha constante, por um certo período de tempo (até que esta parte do aquário fique cheia. Assim, podemos rejeitar os gráficos B e D.

Depois, a altura que a água atinge na régua volta a aumentar proporcionalmente ao tempo, mas com um aumento mais lento, porque é necessária mais água para fazer a mesma variação da altura, que no momento inicial.
Desta forma podemos rejeitar o gráfico C, porque apresenta um aumento da altura com a mesma intensidade no primeiro e no terceiro períodos de tempo.

Resposta: **Opção** Gráfico A

9.

9.1. Como o depósito ainda tem 5 litros de gasolina e tem uma capacidade de 71 litros, o Daniel precisa de introduzir $71 - 5 = 66$ litros de gasolina para encher o depósito.

Como em cada minuto o Daniel introduz 33 litros de gasolina no depósito, demora 2 minutos para introduz 66 litros, ou seja demora 2 minutos para encher o depósito do seu automóvel.

9.2. 33 é o número de litros de gasolina que são introduzidos no depósito num minuto, ou seja, é o número de litros de gasolina que são introduzidos no depósito a cada minuto, durante o abastecimento.

10. Escrevendo a equação na fórmula canónica, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$x(x-1)+2x = 6-4x^2 \Leftrightarrow x^2 - x + 2x = 6 - 4x^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 + 4x^2 = 0 \Leftrightarrow 5x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$(a = 5,\ b = 1 \text{ e } c = -6)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(5)(-6)}}{2(5)} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+120}}{10} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1+11}{10} \vee x = \frac{-1-11}{10} \Leftrightarrow x = \frac{10}{10} \vee x = \frac{-12}{10} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{6}{5}$$

C.S.$=\left\{-\frac{6}{5},1\right\}$

11. Resolvendo o sistema, vem

$$\begin{cases} \frac{x+y}{3} = 1 \\ 2x+3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 3\times 1 \\ 2x+3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3-y \\ 2(3-y)+3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3-y \\ 6-2y+3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3-y \\ -2y+3y = 8-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3-2 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

C.S. $= \{(1,2)\}$

12.

12.1. Como o centro de uma circunferência está a igual distância de dois pontos da circunferência, então o centro pertence à mediatriz de qualquer corda dessa circunferência.

Assim podemos afirmar que o centro (O) pertence à mediatriz da corda $[BC]$

Resposta: **Opção** O ponto O pertence à mediatriz do segmento de reta $[BC]$

12.2. Como o ângulo CAD é o ângulo inscrito relativo ao arco AC, temos que $\overset{\frown}{CD} = 2\times C\hat{A}D = 2\times 40 = 80°$

Como $\overset{\frown}{AD} = 180°$, porque $[AD]$ é um diâmetro da circunferência, e $\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AD}$, vem que

$$\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AD} \Leftrightarrow \overset{\frown}{AC} + 80 = 180 \Leftrightarrow \overset{\frown}{AC} = 180 - 80 \Leftrightarrow \overset{\frown}{AC} = 100°$$

12.3. Como o lado $[AD]$ do triângulo $[AED]$ é um diâmetro de uma circunferência e o vértice E pertence à mesma circunferência, então o triângulo $[AED]$ é retângulo e o lado $[AD]$ é a hipotenusa.
Assim, recorrendo ao Teorema de Pitágoras, e substituindo os valores dados, vem que:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{DE}^2 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 6{,}8^2 + 3{,}2^2 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 46{,}24 + 10{,}24 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 56{,}48 \underset{\overline{AD}>0}{\Rightarrow} \overline{BC} = \sqrt{56{,}48}$$

Assim, como o lado $[AD]$ é um diâmetro da circunferência, temos que o raio é $r = \frac{\sqrt{56{,}48}}{2}$, pelo que o perímetro da circunferência em centímetros, arredondado às décimas, é

$$P_\circ = 2\pi r = 2\pi \times \frac{\sqrt{56{,}48}}{2} = \pi \times \sqrt{56{,}48} \approx 23{,}6 \text{ cm}$$

13. Temos que o volume do cilindro é $V_{ci} = A_b \times h = 12h$

Da mesma forma, o volume do cone é $V_{co} = \frac{1}{3} \times A_b \times h = \frac{1}{3} \times 12 \times h = 4h$

E assim o volume total do sólido é

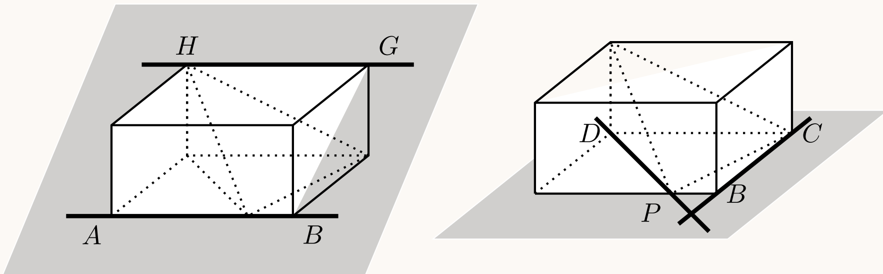
$$V_T = V_{ci} + V_{co} = 12h + 4h = 16h$$

Substituindo o valor do volume total do sólido podemos determinar, em metros, o valor de h, que é a altura do cilindro:

$$V_T = 34 \Leftrightarrow 16h = 34 \Leftrightarrow h = \frac{34}{16} \Leftrightarrow h = 2{,}125 \text{ m}$$

14.

14.1. As retas AB e HG são paralelas, pelo que não são concorrentes, mas existe um plano ao qual ambas pertence, ou seja, são complanares.



As retas DP e BC pertencem ambas ao plano que contém a base inferior do paralelepípedo, ou seja, são complanares e intersetam-se no prolongamento das arestas $[DP]$ e $[BC]$, num ponto exterior do paralelepípedo.

Resposta: **Opção** As retas DP e BC são concorrentes

14.2. Como o triângulo $[DPH]$ é retângulo em D, então o lado $[DP]$ é o cateto adjacente ao ângulo DPH e o lado $[DH]$ é o cateto oposto ao mesmo ângulo, pelo que, usando a definição de tangente de um ângulo, temos:

$$\operatorname{tg}\left(D\hat{P}H\right) = \frac{\overline{DH}}{\overline{DP}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} 32^\circ = \frac{\overline{DH}}{5} \Leftrightarrow 5 \operatorname{tg} 32^\circ = \overline{DH}$$

Como $\operatorname{tg} 32^\circ \approx 0{,}625$, vem que: $\overline{DH} \approx 5 \times 0{,}625 \approx 3{,}125$

Definindo o lado $[DP]$ como a base e o lado $[DH]$ como a altura (ou vice-versa), a área do triângulo $[DPH]$, em cm^2, arredondada às décimas é

$$A_{[DPH]} = \frac{\overline{DP} \times \overline{DH}}{2} \approx \frac{5 \times 3{,}125}{2} \approx 7{,}8 \text{ cm}^2$$

14.3. Como o volume da pirâmide $[HDPC]$ é 10 cm^3, então o volume da pirâmide $[ABCDH]$ é 20 cm^3, porque as duas pirâmides têm a mesma altura e a base da pirâmide $[ABCDH]$ tem o dobro da área da base da pirâmide $[HDPC]$ $(A_{[ABCD]} = 2 \times A_{[DPC]})$

$$V_{[ABCDH]} = 2 \times V_{[HDPC]} = 2 \times 10 = 20 \text{ cm}^3$$

Como o paralelepípedo $[ABCDEFGH]$ e a pirâmide $[ABCDH]$ têm a mesma base e a mesma altura, o volume do paralelepípedo é o triplo do volume da pirâmide:

$$V_{[ABCDEFGH]} = 3 \times V_{[ABCDH]} = 3 \times 20 = 60 \text{ cm}^3$$