Prova final de Matemática - 3.º ciclo (2010, 2.ª chamada)

Proposta de resolução

1. Como são 210 as pessoas entrevistadas e 140 reponderam que a relação entre o seu cão e o seu gato é boa, temos que, calculando a probabilidade com recurso à regra de Laplace, e escrevendo a resposta na forma de fração irredutível, vem:

$$p = \frac{140}{210} = \frac{14}{21} = \frac{2 \times 7}{3 \times 7} = \frac{2}{3}$$

2. Designado por T, P e L as jaulas do tigre, da pantera e do leopardo, respetivamente, podemos organizar uma lista de todas as ordenações das jaulas:

$$T\,P\,L \qquad T\,L\,P \qquad P\,T\,L \qquad P\,L\,T \qquad L\,T\,P \qquad L\,P\,T$$

Ou seja existem 2 ordenações começando pela jaula do tigre, outras 2 se começarmos pela jaula da pantera e mais 2 se começarmos pela jaula do leopardo, num total de 6 quantas maneiras diferentes.

Resposta: **Opção** 6

3. Como a mediana das idades dos macacos é 6,5, e não existe registo de idades igual a este valor, podemos concluir que o número de dados é par e a mediana foi calculada como a média dos dois valores centrais:

$$\tilde{x} = \frac{6+7}{2} = \frac{13}{2} = 6{,}5$$

Ou seja, o número de macacos com idade igual ou inferior a 6, é igual ao número de macacos com idade igual ou superior a 7.

$$\underbrace{5 \;\; 5 \;\; 5 \;\; 6 \;\; 6 \;\; 6 \;\; 6}_{50\%} \; \underbrace{7 \;\; \ldots \;\; 7 \;\; 8 \;\; 8}_{50\%}$$

Como existem 7 macacos com 6 anos ou menos, também existem 7 macacos com 7 anos ou mais, pelo que designado por n o número de macacos com 7 anos, temos que:

$$n + 2 = 7 \;\Leftrightarrow\; n = 7 - 2 \;\Leftrightarrow\; n = 5$$

4. Como $\sqrt[3]{8} = 2$, ou seja $\sqrt[3]{8} \in \mathbb{Q}$, e $\sqrt[3]{27} = 3$, ou seja $\sqrt[3]{27} \in \mathbb{Q}$, em cada uma das opções (A), (B) e (C) existe, pelo menos, um número racional.

Resposta: **Opção** $\sqrt{3};\pi$

5. Como a loja oferece 6 % do seu lucro, e nesse dia o montante correspondeu a 15 euros, então podemos estabelecer uma proporção entre a percentagem e o total:

$$\begin{array}{ccc} 6\,\% & \text{——} & 15 \\ 100\,\% & \text{——} & x \end{array} \qquad x = \frac{100 \times 15}{6} = \frac{1500}{6} = 250$$

Pelo que, podemos afirmar que o lucro da loja, nesse dia, foi de 250 euros.

Resposta: **Opção** 250 euros

6. Como $\sqrt{5} \approx 2{,}24$, temos que, por exemplo, $2{,}3 > \sqrt{5}$ e $2{,}3 < 2{,}5$

Assim, um número x, que verifique a condição $\sqrt{5} < x < 2{,}5$, pode ser $x = 2{,}3$, por exemplo.
Escrevendo 2,3 na forma de uma fração, em que o numerador e o denominador sejam números naturais,

$$2{,}3 = \frac{23}{10}$$

7. Podemos resolver o sistema para encontrar a solução, ou então substituir as soluções no sistema, para identificar qual delas verifica as duas equações do sistema simultaneamente:

- Opção $\left(\frac{1}{2},0\right)$: $\begin{cases} 2 \times \frac{1}{2} + 0 = 1 \\ 4 \times \frac{1}{2} + \frac{0}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 0 = 1 \\ \frac{4}{2} + 0 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ 2 = 2 \end{cases}$ (Proposição verdadeira)

- Opção $(0,1)$: $\begin{cases} 2 \times 0 + 1 = 1 \\ 4 \times 0 + \frac{1}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 + 1 = 1 \\ 0 + \frac{1}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ \frac{1}{2} = 2 \end{cases}$ (Proposição falsa)

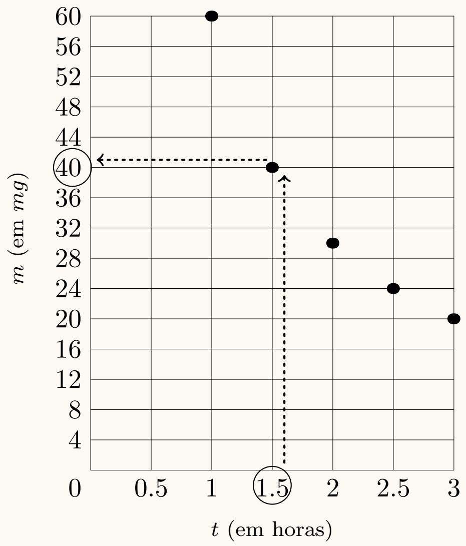
- Opção $(0,4)$: $\begin{cases} 2 \times 0 + 4 = 1 \\ 4 \times 0 + \frac{4}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 + 4 = 1 \\ 0 + \frac{4}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 1 \\ 2 = 2 \end{cases}$ (Proposição falsa)

- Opção $\left(0,\frac{1}{2}\right)$: $\begin{cases} 2 \times 0 + \frac{1}{2} = 1 \\ 4 \times 0 + \frac{\frac{1}{2}}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 + \frac{1}{2} = 1 \\ 0 + \frac{1}{4} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} = 1 \\ \frac{1}{4} = 2 \end{cases}$ (Proposição falsa)

Resposta: **Opção** $\left(\frac{1}{2},0\right)$

8.

Medicamento no sangue do chimpanzé



8.1. Identificando o ponto relativo ao tempo 1,5 horas, verificamos a massa correspondente: 40 mg
(ver gráfico ao lado)

8.2. Como a massa de medicamento existente no sangue do chimpanzé (m) e o tempo (t) são grandezas inversamente proporcionais, temos que o produto das variáveis é a constante de proporcionalidade (k), ou seja:

$$t \times m = k, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Logo podemos calcular a constante de proporcionalidade, multiplicando quaisquer dois valores correspondentes de m e t :

$$1 \times 60 = 1{,}5 \times 40 = 2{,}5 \times 24 = 3 \times 20 = 60$$

Pelo que a constante de proporcionalidade é 60

8.3. Como as variáveis m e t são inversamente proporcionais, e a constante de proporcionalidade é 60, temos que:

$$m \times t = 60 \Leftrightarrow m = \frac{60}{t}$$

Resposta: **Opção** $m = \dfrac{60}{t}$

9. Escrevendo a equação na fórmula canónica, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$x(-2x-3) = 1 \Leftrightarrow -2x^2 - 3x = 1 \Leftrightarrow -2x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

($a = 2$, $b = 3$ e $c = 1$)

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(2)(1)}}{2(2)} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3+1}{4} \vee x = \frac{-3-1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-2}{4} \vee x = \frac{-4}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = -1$$

C.S.=$\left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}$

10. Recorrendo à expressão algébrica da função f, podemos determinar a imagem do objeto 0:

$$f(0) = 0 + 3 = 3$$

E assim verificamos que o gráfico da função f é uma reta que interseta o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas (0,3), ou seja, a ordenada na origem é 3 e não -3 como se observa no "Gráfico A"

Da mesma forma, calculando a imagem do objeto 3, temos:

$$f(3) = 3 + 3 = 6$$

Pelo que a reta representada no "Gráfico B"também não é o gráfico da função f, porque a imagem do objeto 3 é zero e não 6 como é definido pela expressão algébrica da função.

11.

11.1. Como $[ACEG]$ é um quadrado, temos que $B\hat{A}H = 90°$, e a amplitude do ângulo ao centro BAH, cujo arco correspondente é o arco BH, pelo que:

$$\overset{\frown}{BH} = 90°$$

E como o ângulo BIH é o ângulo inscrito relativo ao arco BH, a sua amplitude é metade da amplitude do arco:

$$B\hat{I}H = \frac{\overset{\frown}{BH}}{2} = \frac{90}{2} = 45°$$

11.2. Como $[ACEG]$ é um quadrado de lado 4, a sua área é:

$$A_{[ACEG]} = 4^2 = 16$$

Como as circunferências têm raio lado 2, a área de cada uma é:

$$A_\circ = \pi \times 2^2 = \pi \times 4 = 4\pi$$

Como os centros das circunferências são os vértices do quadrado, a área de cada uma das circunferências que está no interior do quadrado é $\frac{1}{4}$ do total. Como são 4 quartos de circunferência que estão no interior do quadrado, a área do quadrado que não está sombreada corresponde a área de uma circunferência, e assim, a área sombreada, A_S, pode ser calculada como a diferença das áreas do quadrado e de uma circunferência:

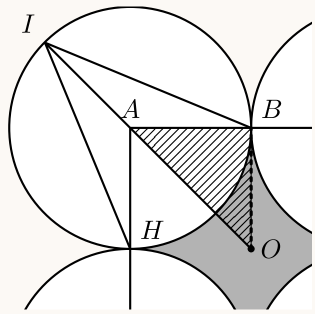
$$A_S = A_{[ACEG]} - 4 \times \frac{1}{4} \times 4\pi = A_{[ACEG]} - 4\pi = 16 - 4\pi \approx 3{,}4$$

11.3. Considerando o triângulo retângulo $[ABO]$, podemos calcular a medida da hipotenusa (o lado $[OA]$) recorrendo ao Teorema de Pitágoras, identificando que: $\overline{AB} = \overline{OB} = 2$ porque é a medida do raio das circunferências, ou metade da medida dos lados do quadrado.

Assim, vem que:

$$\overline{OA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BO}^2 \Leftrightarrow \overline{OA}^2 = 2^2 + 2^2 \Leftrightarrow$$

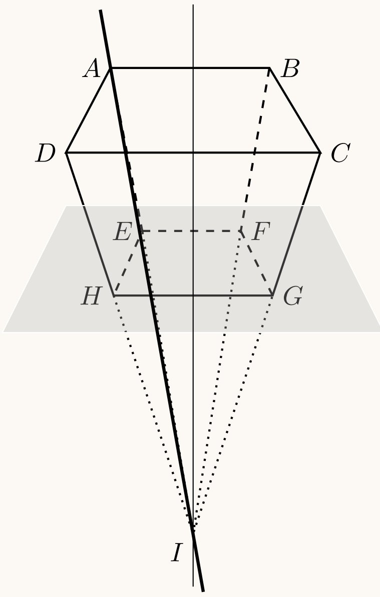
$$\Leftrightarrow \overline{OA}^2 = 4 + 4 \Leftrightarrow \overline{OA}^2 = 8 \underset{\overline{OA}>0}{\Rightarrow} \overline{OA} = \sqrt{8}$$



Verificando que $[AI]$ é um raio de uma circunferência, e por isso, $\overline{AI} = 2$, e como $\overline{IO} = \overline{OA} + \overline{AI}$, vem que o comprimento de $[IO]$, arredondado às décimas, é:

$$\overline{IO} = \sqrt{8} + 2 \approx 4{,}8$$

12.



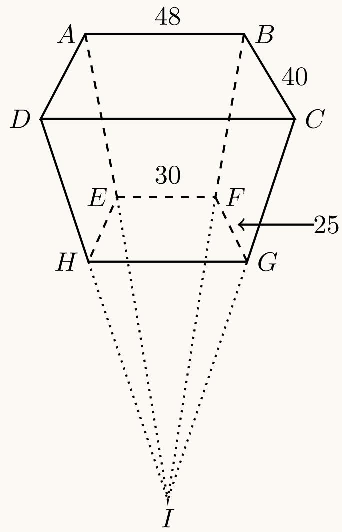
12.1. A reta AI não pertence ao plano EFG, porque, nem o ponto A, nem o ponto I pertencem ao plano.

Como o ponto E pertence à reta AI e ao plano EFG, podemos afirmar que a reta não é estritamente paralela ao plano.

A reta perpendicular ao plano EFG que contém o ponto I é a altura da pirâmide, pelo que a reta que contém a aresta $[AI]$ não é perpendicular ao plano.

Assim, podemos afirmar que a reta AI é concorrente (no ponto E) com o plano EFG, mas não é perpendicular, ou seja é concorrente oblíqua.

Resposta: **Opção** Concorrente oblíqua



12.2. Calculando a altura da pirâmide $[EFGHI]$, h, representada a tracejado, como a diferença da altura da pirâmide $[ABCDI]$ e da altura do tronco de pirâmide, temos

$$h = 80 - 30 = 50 \text{ cm}$$

E assim o volume da pirâmide $[EFGHI]$ é

$$V_{[EFGHI]} = \frac{1}{3} \times A_{[EFGH]} \times h = \frac{1}{3} \times 30 \times 25 \times 50 = 12\,500 \text{ cm}^3$$

E o volume da pirâmide $[ABCDI]$ é

$$V_{[ABCDI]} = \frac{1}{3} \times A_{[ABCD]} \times alt = \frac{1}{3} \times 48 \times 40 \times 80 = 51\,200 \text{ cm}^3$$

Assim, o volume do tronco de pirâmide, V_T, pode ser calculado como a diferença dos volumes das duas pirâmides

$$V_T = V_{[ABCDI]} - V_{[EFGHI]} = 51\,200 - 12\,500 = 38\,700 \text{ cm}^3$$

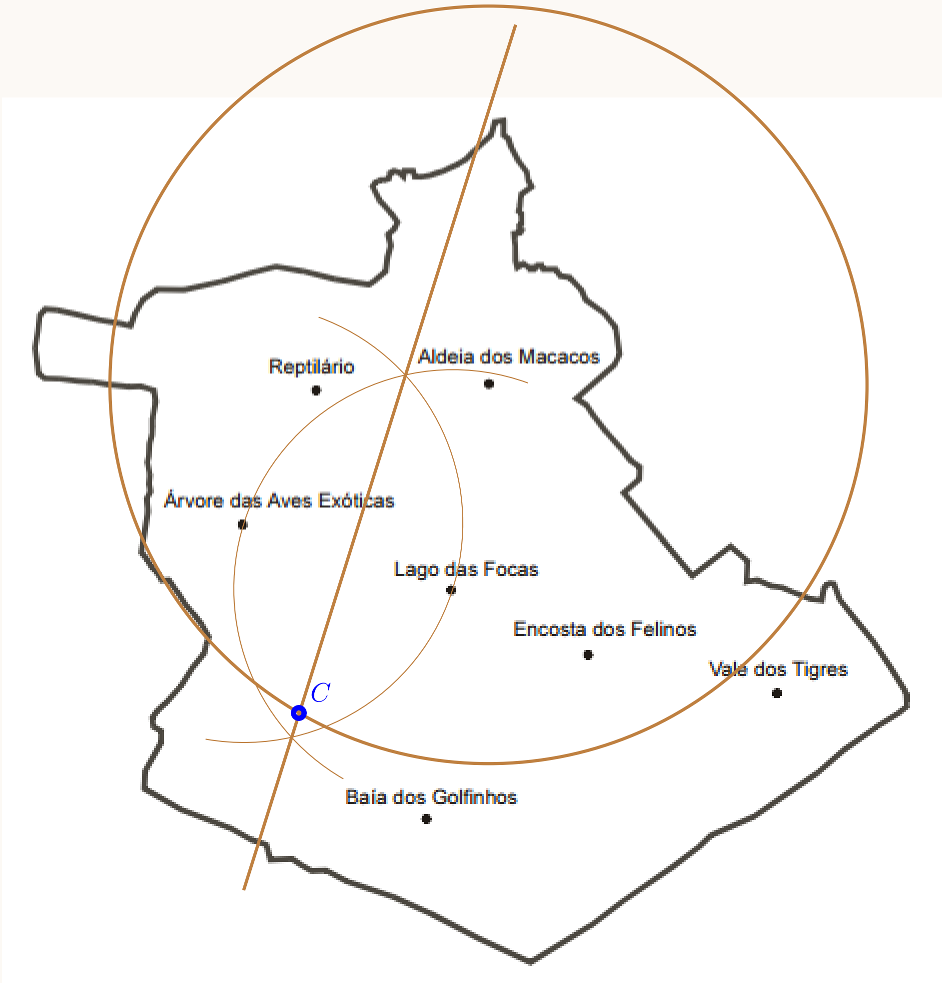
12.3. Como o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B, relativamente ao ângulo ACB, o lado $[AB]$ é o cateto oposto e o lado $[BC]$ é o cateto adjacente, e assim, recorrendo à definição de tangente de um ângulo e substituindo os valores conhecidos, temos que

$$\text{tg}\,(A\hat{C}B) = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \text{tg}\,(A\hat{C}B) = \frac{1{,}26}{0{,}6} \Leftrightarrow \text{tg}\,(A\hat{C}B) = 2{,}1$$

Assim, procurando o valor mais próximo de 2,1 na coluna dos valores da tangente na tabela de valores das razões trigonométricas (ou recorrendo à calculadora), e arredondando a amplitude do ângulo ACB às unidades, temos que

$$A\hat{C}B = \text{tg}^{-1}\,(2{,}1) \approx 65^\circ$$

13.


Reptilário
Aldeia dos Macacos
Árvore das Aves Exóticas
Lago das Focas
Encosta dos Felinos
Vale dos Tigres
C
Baía dos Golfinhos