

Prova final de Matemática - 3.º ciclo (2010, 1.ª chamada)

Proposta de resolução



1. Organizando as escolhas possíveis da Teresa numa tabela, temos

	Maria(M)	Inês(I)	Joana(J)
Sábado(s)	Ms	Is	Js
Domingo(d)	Md	Id	Jd

Assim, podemos observar que existem 6 escolhas possíveis, das quais apenas uma corresponde a seleccionar a Maria e o sábado para ir ao arraial, ou seja, calculando a probabilidade pela Regra de Laplace, temos que:

$$p = \frac{1}{6}$$

Resposta: **Opção** $\frac{1}{6}$

2. Designando por n o número de rifas que a Alice comprou, como foram vendidas 250 rifas, recorrendo à Regra de Laplace temos que a probabilidade de a Alice ganhar o prémio é $\frac{n}{205}$

Como sabemos que esta probabilidade é $\frac{1}{25}$, estabelecendo a igualdade e determinado o valor de n , vem:

$$\frac{n}{250} = \frac{1}{25} \Leftrightarrow n = \frac{250}{25} \Leftrightarrow n = 10$$

Resposta: **Opção** 10

3. Observando o gráfico, podemos verificar que no dia 11 foram vendidos 16 vasos, no dia 12 foram vendidos 20 vasos e no dia 13 foram vendidos 25 vasos.

Como nos primeiros 10 dias foram vendidos, em média, 3 vasos por dia, ou seja 30 vasos ($3 \times 10 = 30$), calculando a média dos vasos vendidos nos 13 dias, temos:

$$\bar{x} = \frac{30 + 16 + 20 + 25}{13} = \frac{91}{13} = 7 \text{ vasos}$$

Resposta: **Opção** 7

4. Como a Beatriz contou os rebuçados de 2 em 2 e não sobrou nenhum, e depois contou de 5 em 5 e também não sobrou nenhum, então o número de rebuçados é múltiplo de 2 e também de 5, pelo que é múltiplo de 10.

Como quando a Beatriz contou de 3 em 3, sobraram 2 rebuçados, e o saco tinha mais de 60 rebuçados, devemos procurar um múltiplo de 10, maior que 60, cujo resto da divisão inteira por 3 seja 2:

- $70 \div 3 = 23 + 1$
- $80 \div 3 = 26 + 2$

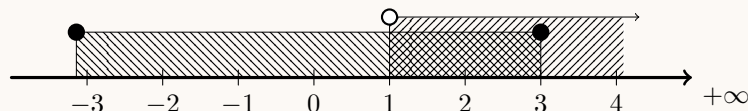
Logo, de acordo com as condições definidas, o menor número de rebuçados que o saco que a Beatriz comprou pode ter é 80

5. Analisando cada uma das opções, temos que

- $\sqrt{25} = 5$, logo $\sqrt{25} \in \mathbb{Q}$, ou seja $\sqrt{25}$ não é um número irracional
- $\sqrt{2,5} = \sqrt{\frac{25}{10}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}}$, logo, como $\sqrt{10}$ é um número irracional, também $\sqrt{2,5}$ é um número irracional
- $\sqrt{0,25} = \sqrt{\frac{25}{100}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{100}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, logo $\sqrt{0,25} \in \mathbb{Q}$, ou seja $\sqrt{0,25}$ não é um número irracional
- $\sqrt{0,0025} = \sqrt{\frac{25}{10000}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{10000}} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$, logo $\sqrt{0,0025} \in \mathbb{Q}$, ou seja $\sqrt{0,0025}$ não é um número irracional

Resposta: **Opção** $\sqrt{2,5}$

6. Representando os dois intervalos indicados na definição do conjunto C na reta real, temos:



Assim temos que $[-\pi, 3] \cap]1, +\infty[=]1, 3]$

Resposta: **Opção** $]1, 3]$



7. Designando por x a massa de uma caixa vazia, e por y a massa de um bolo, a afirmação «uma caixa com quatro bolos tem uma massa de 310 gramas», pode ser traduzida por

$$x + 4y = 310$$

Da mesma forma, a afirmação «duas caixas, cada uma com três bolos, têm uma massa total de 470 gramas», ou seja a massa de duas caixas e seis bolos pode ser traduzida por

$$2x + 6y = 470$$

Assim, podemos escrever um sistema e determinar o valor de x :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 4y = 310 \\ 2x + 6y = 470 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 310 - 4y \\ 2(310 - 4y) + 6y = 470 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 310 - 4y \\ 620 - 8y + 6y = 470 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 310 - 4y \\ -2y = 470 - 620 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 310 - 4y \\ -2y = -150 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 310 - 4y \\ y = \frac{-150}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 310 - 4 \times 75 \\ y = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 310 - 300 \\ y = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 75 \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, temos que, a massa de cada caixa vazia, ou seja o valor de x em gramas, é de 10 gramas.

8. Resolvendo a inequação, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} - 2x < \frac{5}{3} + \frac{x}{2} &\Leftrightarrow \frac{1}{3(2)} - \frac{2x}{1(6)} < \frac{5}{3(2)} + \frac{x}{2(3)} \Leftrightarrow \frac{2}{6} - \frac{12x}{6} < \frac{10}{6} + \frac{3x}{6} \Leftrightarrow 2 - 12x < 10 + 3x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -12x - 3x < 10 - 2 \Leftrightarrow -15x < 8 \Leftrightarrow 15x > -8 \Leftrightarrow x > -\frac{8}{15} \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} = \left] -\frac{8}{15}, +\infty \right[$$

9. Escrevendo a equação na fórmula canónica, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$x(x - 3) + 2x = 6 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2x = 6 \Leftrightarrow x^2 - x = 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(a = 1, b = -1 \text{ e } c = -6)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 + 5}{2} \vee x = \frac{1 - 5}{2} \Leftrightarrow x = \frac{6}{2} \vee x = \frac{-4}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$$

$$\text{C.S.} = \{-2, 3\}$$

10.

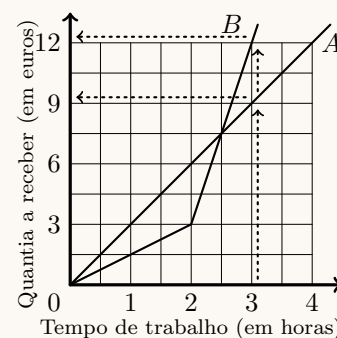
- 10.1. Como o gráfico A é parte de uma reta que contém a origem do referencial, a função correspondente é uma função de proporcionalidade direta.

Assim, identificando no gráfico que o ponto de coordenadas $(1,3)$ pertence ao gráfico A , podemos garantir que a uma hora de trabalho corresponde (de acordo com esta função) um pagamento de 3 euros, pelo que, a um tempo de trabalho de 6 horas corresponde um pagamento de $6 \times 3 = 18$ euros.



- 10.2. Observando o gráfico, podemos verificar que o pagamento correspondente a 3 horas de trabalho é maior na função representada pelo gráfico *B* do que na função correspondente ao gráfico *A*

Como os dois irmãos vão trabalhar ambos 3 horas e o Carlos irá receber mais, o gráfico *B* é o que representa a relação entre o tempo de trabalho do Carlos e a quantia que ele receberá por esse trabalho.



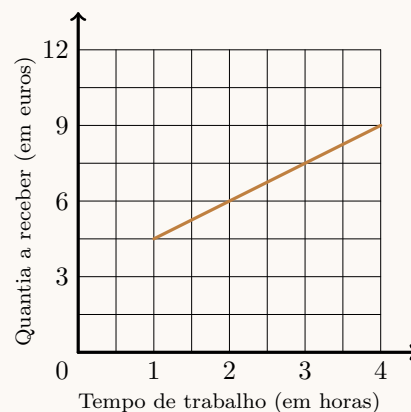
- 10.3. Como a Laura recebe 3 euros para o bilhete e mais 1,5 euros por cada hora de trabalho, por uma hora de trabalho, a Laura irá receber

$$3 + 1,5 = 4,5 \text{ euros}$$

Ao fim de 4 horas deve receber

$$3 + 1,5 \times 4 = 9 \text{ euros}$$

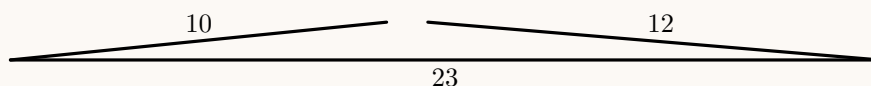
Ou seja, o gráfico que estabelece a quantia a receber pela Laura, em função do tempo de trabalho, para valores do tempo de trabalho compreendidos entre 1 hora e 4 horas (inclusive), é o segmento de reta de extremos (1; 4,5) e (4; 9)



11. Como sabemos que num triângulo a soma dos comprimentos dos lados menores é superior ao comprimento do lado maior, e, neste caso

$$10 + 12 < 23$$

logo não pode existir um triângulo com estes comprimentos, como se ilustra na figura seguinte.



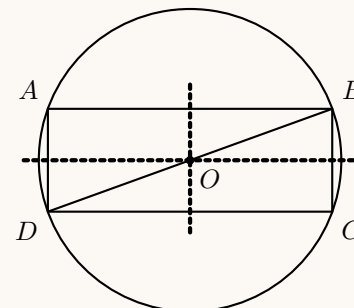
12.

- 12.1. Como o ângulo BDA é o ângulo inscrito relativo ao arco AB , a amplitude do arco é o dobro da amplitude do ângulo:

$$\widehat{AB} = 2 \times \widehat{BDA} = 2 \times 70 = 140^\circ$$

- 12.2. Desenhando sobre o retângulo as duas perpendiculares aos lados pelos pontos médios podemos visualizar os 2 eixos de simetria do retângulo (as diagonais não são eixos de simetria).

Logo, o retângulo $[ABCD]$ tem 2 eixos de simetria



- 12.3. Como o triângulo $[ABD]$ é retângulo em A , o lado $[BD]$ é a hipotenusa, e relativamente ao ângulo BDA , $[AB]$ é o cateto oposto, pelo que, usando a definição de seno, temos:

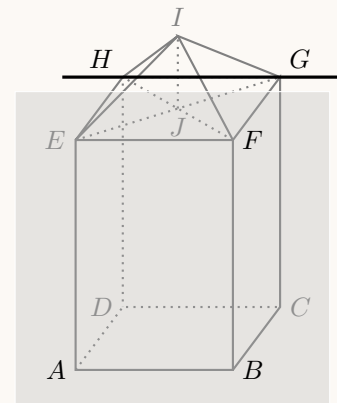
$$\text{sen}(\hat{BDA}) = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \text{sen } 70^\circ = \frac{4,35}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \overline{BD} = \frac{4,35}{\text{sen } 70^\circ}$$

Como $\text{sen } 70^\circ \approx 0,940$, vem que: $\overline{BD} \approx \frac{4,35}{0,940} \approx 4,63 \text{ cm}$

13.

- 13.1. Como o plano ABF contém uma face do prisma e a reta HG contém uma aresta da face oposta, e as faces opostas do prisma estão em planos paralelos, então a reta HG é estritamente paralela ao plano ABF

Resposta: **Opção C**



- 13.2. Como a base do prisma $[ABCDEFGH]$ é um quadrado, o volume do prisma é

$$V_{[ABCDEFGH]} = \overline{AB}^2 \times \overline{BF} = 13^2 \times 19 = 3211 \text{ cm}^3$$

Como a base da pirâmide $[EFGHI]$ tem a área igual à base do prisma, o volume da pirâmide é:

$$V_{[EFGHI]} = \frac{1}{3} \times \overline{AB}^2 \times \overline{IJ} = \frac{1}{3} \times 13^2 \times 6 = 338 \text{ cm}^3$$

E o volume do sólido pode ser calculado como a soma dos volumes do prisma e da pirâmide, pelo que o Volume do sólido é:

$$V_S = V_{[ABCDEFGH]} + V_{[EFGHI]} = 3211 + 338 = 3549 \text{ cm}^3$$



14.

