

Exame final nacional de Matemática A (2020, 1.ª fase)

Proposta de resolução



1.

1.1. Determinando uma expressão de $u_{n+1} - u_n$ temos

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \frac{8(n+1) - 4}{(n+1) + 1} - \frac{8n - 4}{n + 1} = \frac{8n + 4}{n + 2} - \frac{8n - 4}{n + 1} = \frac{(8n + 4)(n + 1) - (8n - 4)(n + 2)}{(n + 2)(n + 1)} = \\&= \frac{8n^2 + 8n + 4n + 4 - (8n^2 + 16n - 4n - 8)}{(n + 2)(n + 1)} = \frac{8n^2 + 8n + 4n + 4 - 8n^2 - 16n + 4n + 8}{(n + 2)(n + 1)} = \\&= \frac{12n + 4 - 12n + 8}{(n + 2)(n + 1)} = \frac{12}{(n + 2)(n + 1)}\end{aligned}$$

Como $n > 0$, temos que $(n + 2)(n + 1) > 0$, e como o quociente de dois números positivos (4 e $(n + 2)(n + 1)$) é um valor positivo, temos que

$$u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ou seja, (u_n) é uma sucessão **monótona crescente**.

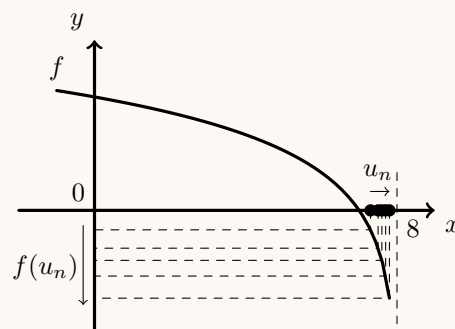
1.2. Como $\lim u_n = \lim \left(\frac{8n - 4}{n + 1} \right) = \lim \left(\frac{8n}{n} \right) = 8$ e (u_n) é uma monótona crescente, então $\lim u_n = 8^-$

E assim, vem que:

$$\lim f(u_n) = \lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) = \log_2(8 - 8^-) = \log_2(0^+) = -\infty$$

Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de (x_n) como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $g(x_n)$, que tendem para $-\infty$, quando o valor de n aumenta.

Resposta: **Opção A**



2. Como cada uma das 4 pessoas escolhe um de entre 5 números, podendo ocorrer repetições, o número de escolhas diferentes que podem ocorrer, ou seja o número de casos possíveis, é ${}^5A_2 = 5^4$

Como duas pessoas devem escolher o número cinco, e as restantes um número dos restantes 4, o número de escolhas que obedecem a esta condição, ou seja, o número de casos favoráveis, é $1^2 \times 4^2 \times {}^4C_2$, onde 4C_2 permite calcular o número de posições diferentes das 2 pessoas que escolhem o número cinco na sequência das 4 pessoas.

Assim a probabilidade de exatamente duas delas das cinco pessoas escolherem o número 5, é:

$$\frac{4^2 \times {}^4C_2}{5^4} = 0,1536$$

Resposta: **Opção D**

3.

3.1. Podemos observar que:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{3}P(A) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(B|A) = \frac{1}{3}$$

E assim, designando por a o número de bolas azuis e por b o número de bolas brancas que existiam inicialmente no saco, temos que o número de bolas brancas na segunda extração, sabendo que a primeira bola extraída foi azul, é b e o número total de bolas é $a - 1 + b$

Assim, como a probabilidade de retirar uma bola branca na segunda extração, sabendo que foi retirada uma bola azul na primeira extração, é $\frac{1}{3}$, temos que:

$$P(B|A) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{b}{a - 1 + b} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3b = a - 1 + b \Leftrightarrow 3b - b + 1 = a \Leftrightarrow 2b + 1 = a$$

Desta forma, como b é um número natural, $2b + 1$ é um número ímpar, ou seja, a , o número de bolas azuis que inicialmente existia no saco era ímpar.

- 3.2. Como cada uma das 5 caixas com número par deve ter, pelo menos, uma bola azul e existem 8 bolas azuis, restam $8 - 5 = 3$ bolas azuis para colocar como uma segunda bola.

Como cada uma das 5 caixas com número ímpar deve ter, pelo menos, uma bola branca e existem 7 bolas brancas, restam $7 - 5 = 2$ bolas brancas para colocar como uma segunda bola.

Desta forma podemos seleccionar quaisquer duas das 10 caixas para colocar as duas bolas brancas, a que correspondem ${}^{10}C_2$ escolhas diferentes; e depois, por cada uma destas escolhas, devemos escolher 3 das restantes 8 caixas (porque nenhuma pode conter mais do que duas bolas), para colocar as 3 bolas azuis restantes, a que correspondem 8C_3

Assim, o número de maneiras diferentes em podem ficar colocadas as bolas nas dez caixas, nas condições indicadas, é:

$${}^{10}C_2 \times {}^8C_3 = 2520$$

Resposta: **Opção B**



4.

4.1. Considerando $z = \rho e^{i\theta}$, temos que:

$$z^2 = \bar{z} \Leftrightarrow (\rho e^{i\theta})^2 = \rho e^{i(-\theta)} \Leftrightarrow \rho^2 e^{i(2\theta)} = \rho e^{i(-\theta)} \Leftrightarrow \rho^2 = \rho \wedge 2\theta = -\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Assim temos que:

- $\rho^2 = \rho \Leftrightarrow \rho^2 - \rho = 0 \Leftrightarrow \rho(\rho - 1) = 0 \Leftrightarrow \rho = 0 \vee \rho - 1 = 0 \Leftrightarrow \rho = 0 \vee \rho = 1$
- $2\theta = -\theta + 2k\pi \Leftrightarrow 2\theta + \theta = 2k\pi \Leftrightarrow 3\theta = 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Assim, três soluções não nulas da equação ($\rho \neq 0$), com afijos diferentes, são:

- $z_1 = e^{i(0)} (\rho = 1 \wedge k = 0)$
- $z_2 = e^{i(\frac{2\pi}{3})} (\rho = 1 \wedge k = 1)$
- $z_3 = e^{i(\frac{4\pi}{3})} (\rho = 1 \wedge k = 2)$

(As restantes soluções não nulas da equação, associadas a outros valores de k , têm afijos iguais a um dos três apresentados).

Logo, escrevendo duas das soluções apresentadas na forma algébrica, vem:

- $z_1 = e^{i(0)} = e^0 = 1$
- $z_2 = e^{i(\frac{2\pi}{3})} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Logo, como os afijos dos números complexos não nulos que são soluções desta equação são os vértices de um polígono regular, ou seja de um triângulo equilátero, temos que respetivo o perímetro é dado pelo triplo da medida do lado, que, por sua vez, é a distância entre dois afijos, ou seja:

$$\begin{aligned} P &= 3 \times |z_1 - z_2| = 3 \times \left| 1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \right| = 3 \times \left| 1 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = 3 \times \left| \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = \\ &= 3 \times \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 3\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = 3\sqrt{\frac{12}{4}} = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

4.2. Observando a condição, temos que:

$$\operatorname{Re}(z) \times \operatorname{Im}(z) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{\operatorname{Re}(z)}$$

Ou seja, o conjunto de afijos que verificam a condição, são os afijos de números complexos, cujas partes real e imaginária são inversamente proporcionais, ou seja, o conjunto de pontos é uma hipérbole.

Podemos ainda verificar que estes afijos pertencem ao 1.º e 3.º quadrantes, porque os números complexos correspondentes têm as partes real e imaginária, ambas positivas, ou ambas negativas.

Assim, de entre as opções apresentadas, a única onde pode estar representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definido por esta condição, é a opção D.

Resposta: **Opção D**

5.

5.1. Determinando as coordenadas dos pontos A e B , com recurso à equação que define o plano ABC , temos:

- Como o ponto A pertence ao eixo Ox , tem ordenada e cota nulas, e assim, a sua abcissa é:

$$3x + 4(0) + 4(0) - 12 = 0 \Leftrightarrow 3x + 0 + 0 = 12 \Leftrightarrow x = \frac{12}{3} \Leftrightarrow x = 4$$

- Como o ponto B pertence ao eixo Oy , tem abcissa e cota nulas, e assim, a sua ordenada é:

$$3(0) + 4y + 4(0) - 12 = 0 \Leftrightarrow 0 + 4y + 0 = 12 \Leftrightarrow y = \frac{12}{4} \Leftrightarrow y = 3$$

Assim, as coordenadas dos pontos A e B são, respetivamente, $(4,0,0)$ e $(0,3,0)$ e a distância \overline{AB} , ou seja, a altura do cilindro, é:

$$\overline{AB} = \sqrt{(0-4)^2 + (3-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

Como o volume do cilindro (V_C) é igual a 10π podemos determinar \overline{BC} , ou seja, a medida do raio da base do cilindro:

$$V_C = \pi \times \overline{BC}^2 \times \overline{AB} \Leftrightarrow 10\pi = \pi \times \overline{BC}^2 \times 5 \Leftrightarrow \frac{10\pi}{5\pi} = \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 2 \Leftrightarrow \overline{BC} = \sqrt{2}$$

5.2. Designado por Q o ponto do plano ABC que se encontra mais próximo do ponto P , então a reta PQ é perpendicular ao plano ABC , pelo que o vetor normal do plano ABC ($\vec{v} = (3,4,4)$) é também um vetor diretor da reta PQ . Assim, temos que uma equação vetorial da reta PQ , é:

$$(x,y,z) = P + \lambda \vec{v}, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x,y,z) = (3,5,6) + \lambda(3,4,4), \lambda \in \mathbb{R}$$

Assim, as coordenadas de todos os pontos da reta PQ , e em particular o ponto do ponto Q , para $\lambda \in \mathbb{R}$, são da forma:

$$(x,y,z) = (3,5,6) + \lambda(3,4,4) = (3 + 3\lambda, 5 + 4\lambda, 6 + 4\lambda)$$

Como o ponto Q pertence ao plano ABC podemos determinar o valor de λ substituindo as coordenadas genéricas do ponto, na equação do plano:

$$3(3 + 3\lambda) + 4(5 + 4\lambda) + 4(6 + 4\lambda) - 12 = 0 \Leftrightarrow 9 + 9\lambda + 20 + 16\lambda + 24 + 16\lambda - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 41\lambda = 12 - 9 - 20 - 24 \Leftrightarrow 41\lambda = -41 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{41}{41} \Leftrightarrow \lambda = -1$$

Desta forma temos que as coordenadas do ponto Q são:

$$(3 + 3(-1), 5 + 4(-1), 6 + 4(-1)) = (3 - 3, 5 - 4, 6 - 4) = (0, 1, 2)$$

6. Como o declive da reta é a tangente da inclinação ($m = \text{tg } \hat{O\hat{T}S}$), ou seja:

$$\text{tg } \hat{O\hat{T}S} = 2 \Rightarrow \hat{O\hat{T}S} = \text{tg}^{-1}(2)$$

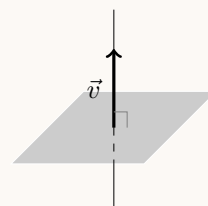
Como o ponto S pertence ao eixo Oy e tem abcissa inferior à do ponto T $\hat{S\hat{T}U}$ e $\hat{O\hat{T}S}$ são ângulos suplementares, ou seja:

$$\hat{S\hat{T}U} + \hat{O\hat{T}S} = \pi \text{ rad}$$

E assim, recorrendo à calculadora, temos que:

$$\hat{S\hat{T}U} + \text{tg}^{-1}(2) = \pi \Leftrightarrow \hat{S\hat{T}U} = \pi - \text{tg}^{-1}(2) \Rightarrow \hat{S\hat{T}U} \approx 2,03 \text{ rad}$$

Resposta: **Opção C**



7.

- 7.1. Como quando o movimento de rotação da manivela se inicia, o pistão se encontra na posição B , a distância do pistão ao ponto O , zero segundos, após o instante em que é iniciado o movimento, é dada por:

$$\overline{OP} = \overline{OB} = d(0)$$

Assim, o comprimento da biela, em centímetros, é:

$$\overline{OB} - \overline{OM} = d(0) - 1 = \cos(0) + \sqrt{9 - \sin^2(0)} - 1 = 1 + \sqrt{9 - 0} - 1 = 3$$

Resposta: **Opção B**

- 7.2. Temos que no instante t_0 , a distância do pistão ao ponto O é $d(t_0)$ e passados 2 segundos, a distância é dada por $d(t_0 + 2)$

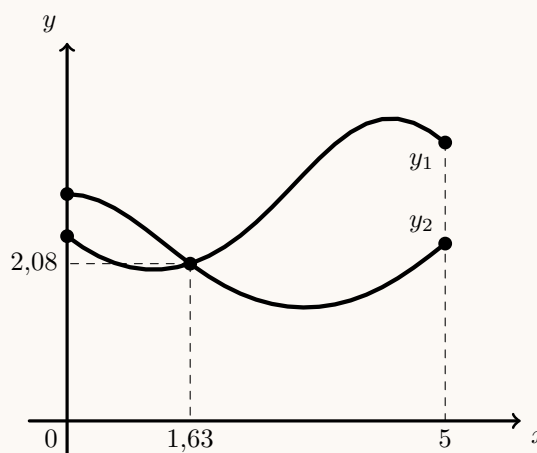
Como nestes dois segundos a distância diminuiu 25%, ficou reduzida a 75% do valor anterior, ou seja:

$$d(t_0 + 2) = 0,75d(t_0)$$

Desta forma simplificando a equação temos:

$$d(t_0 + 2) = 0,75d(t_0) \Leftrightarrow \cos(t_0 + 2) + \sqrt{9 - \sin^2(t_0 + 2)} = 0,75(\cos(t_0) + \sqrt{9 - \sin^2(t_0)})$$

Visualizando na calculadora gráfica os gráficos das funções $y_1 = \cos(x + 2) + \sqrt{9 - \sin^2(x + 2)}$, e $y_2 = 0,75(\cos(x) + \sqrt{9 - \sin^2(x)})$, para $0 \leq x \leq 5$ (porque a situação descrita se reporta aos primeiros 5 segundos do movimento), reproduzidos na figura ao lado, e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos o valor aproximado com duas casas decimais das coordenadas do ponto de interseção (1,63; 2,08)



Assim, temos que $t_0 \approx 1,63$ e que a distância correspondente, arredondada às décimas, é:

$$d(1,63) \approx \cos(1,63) + \sqrt{9 - \sin^2(1,63)} \approx 2,8 \text{ cm}$$

8. Como o ponto A está sobre a reta definida pela equação $x = 1$, tangente à circunferência trigonométrica, então a ordenada do ponto A é $y_A = \operatorname{tg} \alpha = a$, sendo α o ângulo definido pelo semieixo positivo Ox e pela semireta OA

Como o ponto B pertence à circunferência trigonométrica, tem coordenadas $(\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha)$, ou seja, a abscissa do ponto B é $x_B = \cos \alpha$

Desta forma, como $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, $\operatorname{tg} \alpha \neq 0$, e $\cos \alpha \neq 0$, temos que a abscissa do ponto B :

$$1 + a^2 = \frac{1}{x_B^2} \Leftrightarrow x_B^2 = \frac{1}{1 + a^2} \Leftrightarrow_{x_B > 0} x_B = \sqrt{\frac{1}{1 + a^2}} \Leftrightarrow x_B = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}$$

Resposta: **Opção A**



9.

9.1. Como a função está definida em $] - \infty, 2]$, começamos por determinar o declive da assíntota oblíqua do gráfico de f , quando $x \rightarrow -\infty$:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \ln(e^x + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x} + \frac{\ln(e^x + 1)}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{\ln(e^x + 1)}{x} \right) = 1 + \frac{\ln(e^{-\infty} + 1)}{-\infty} = 1 + \frac{\ln(0^+ + 1)}{-\infty} = 1 + \frac{1^+}{-\infty} = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

Calculando o valor da ordenada na origem, temos que:

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \ln(e^x + 1) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^x + 1)) = \\ &= \ln(e^{-\infty} + 1) = \ln(0^+ + 1) = \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

Desta forma a equação reduzida da assíntota oblíqua do gráfico de f é:

$$y = x + 0 \Leftrightarrow y = x$$

9.2. Resolvendo a equação dada, para $x \in] - \infty, 2]$, temos:

$$\begin{aligned} f(x) = 2x + 1 &\Leftrightarrow x + \ln(e^x + 1) = 2x + 1 \Leftrightarrow \ln(e^x + 1) = -x + 2x + 1 \Leftrightarrow \ln(e^x + 1) = x + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^{x+1} = e^x + 1 \Leftrightarrow e^x \times e - e^x = 1 \Leftrightarrow e^x(e - 1) = 1 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{e - 1} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{e - 1}\right) \end{aligned}$$

Apresentando a única solução na forma $-\ln k$, $k > 0$, vem:

$$\ln\left(\frac{1}{e - 1}\right) = \ln((e - 1)^{-1}) = (-1)\ln(e - 1) = -\ln(e - 1) \quad (\text{como } e > 1, \text{ então } e - 1 > 0)$$

9.3. Resolvendo a equação $y = f(x) - x$ em ordem a x , para determinar a expressão algébrica da função h^{-1} , temos:

$$\begin{aligned} y = f(x) - x &\Leftrightarrow y = x + \ln(e^x + 1) - x \Leftrightarrow y = \ln(e^x + 1) \Leftrightarrow e^y = e^x + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^y = e^x + 1 \Leftrightarrow e^y - 1 = e^x \Leftrightarrow \ln(e^y - 1) = x \end{aligned}$$

Desta forma temos que, para $x \in] - \infty, 2]$, $h^{-1}(x) = \ln(e^x - 1)$

Resposta: **Opção C**



10.

10.1. Para averiguar se a função g é contínua em $x = 0$, temos que verificar se $g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$

- $g(0) = 0$
 - $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln x) = 0 \times (-\infty)$ (Indeterminação)
- (fazendo $y = \frac{1}{x}$, temos $x = \frac{1}{y}$ e se $x \rightarrow 0^+$, então $y \rightarrow +\infty$)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln x) &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{1}{y} \right)^2 \times \ln \frac{1}{y} \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y^2} \times (\ln 1 - \ln y) \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln y}{y^2} \right) = \\ &= - \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln y}{y^2} \right) = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln y}{y} \times \frac{1}{y} \right) = - \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} = -0 \times \frac{1}{+\infty} = 0 \times 0^+ = 0 \end{aligned}$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 + \frac{\text{sen } x}{1 - e^x} \right) = 1 + \frac{\text{sen } 0}{1 - e^0} = 1 + \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 + \frac{\text{sen } x}{1 - e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen } x}{1 - e^x} = 1 + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen } x}{-(1 + e^x)} = \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{\text{sen } x}{x}}{\frac{1 - e^x}{x}} = 1 + \frac{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen } x}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{e^x - 1}{x} \right)} = 1 + \frac{\underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen } x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}}{-\underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x}}_{\text{Lim. Notável}}} = 1 + \frac{1}{-1} = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Como $g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$, a função g é contínua em $x = 0$

10.2. Começamos por determinar a expressão da derivada da função g , em $]0, +\infty[$:

$$g'(x) = (x^2 \ln x)' = (x^2)' \times \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln x + \frac{x^2}{x} = 2x \ln x + x \quad x \neq 0$$

Calculando os zeros da derivada da função g , em $]0, +\infty[$, temos:

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2x \ln x + x = 0 \Leftrightarrow x(2 \ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ 0 \notin]0, +\infty[\end{matrix} \vee 2 \ln x + 1 = 0 \Rightarrow 2 \ln x = -1 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$g'(x)$	n.d.	-	0	+
$g(x)$	n.d.	\searrow	min	\nearrow

Assim, podemos concluir que a função g :

- é decrescente no intervalo $]0, e^{-\frac{1}{2}}]$;
- é crescente no intervalo $[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty[$;
- tem um mínimo relativo que é:

$$g\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = e^{-1} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \ln e = \frac{1}{e} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times 1 = -\frac{1}{2e}$$

