

Exame final nacional de Matemática A (2019, Época especial)

Proposta de resolução



Caderno 1

1.

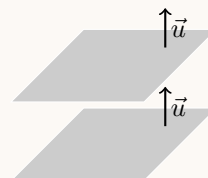
- 1.1. Substituindo o valor da ordenada do ponto A , $y_A = 4$ na equação da reta r , podemos calcular o valor de k , e depois, o valor da cota do ponto de interseção:

$$\begin{cases} x = 1 + 0k \\ y = 2 + k \\ z = 1 + 5k \end{cases} \stackrel{y=4}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 1 \\ 4 = 2 + k \\ z = 1 + 5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2 = k \\ z = 1 + 5 \times 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ k = 2 \\ z = 1 + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ k = 2 \\ z = 11 \end{cases}$$

Ou seja, as coordenadas do ponto A são $(1,4,11)$

Observando a equação do plano α podemos verificar que $\vec{u} = (2,3,-1)$ é um vetor normal do plano α , e também de todos os planos paralelos ao plano α , cujas equações são da forma:

$$2x + 3y - z + d = 0$$



Como as coordenadas do ponto A são $(1,4,11)$, e este pertence ao plano pretendido, podemos determinar o valor do parâmetro d , substituindo estas coordenadas, na equação anterior:

$$2(1) + 3(4) - 11 + d = 0 \Leftrightarrow 2 + 12 - 11 + d = 0 \Leftrightarrow 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -3$$

Logo, uma equação do plano que é paralelo ao plano α e que passa pelo ponto A é:

$$2x + 3y - z - 3 = 0$$

- 1.2. As coordenadas de todos os pontos da reta r , e em particular o ponto de interseção da reta r com o plano α , para $k \in \mathbb{R}$, são da forma:

$$(x,y,z) = (1,2,1) + k(0,1,5) = (1 + 0 \times k, 2 + 1 \times k, 1 + 5 \times k) = (1, 2 + k, 1 + 5k)$$

Como o ponto de interseção da pertence ao plano α podemos determinar o valor de k substituindo as coordenadas genéricas do ponto, na equação do plano:

$$2(1) + 3(2 + k) - (1 + 5k) - 9 = 0 \Leftrightarrow 2 + 6 + 3k - 1 - 5k - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 + 6 + 3k - 1 - 5k - 9 = 0 \Leftrightarrow -2k - 2 = 0 \Leftrightarrow -2k = 2 \Leftrightarrow k = \frac{2}{-2} \Leftrightarrow k = -1$$

Desta forma temos que as coordenadas do ponto de interseção da reta r com o plano α , ou seja as coordenadas do ponto P , são:

$$(1, 2 + (-1), 1 + 5(-1)) = (1, 1, -4)$$

2.

- 2.1. Como a experiência se repete várias vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades segue o modelo binomial ($P(X = k) = {}^n C_k p^k q^{n-k}$).

Temos que:

- $n = 5$ (repete-se o lançamento do dado por cinco vezes).
- $p = \frac{1}{4}$ (a probabilidade do sucesso, ou seja «Sair face 4» é $\frac{1}{4}$, porque o dado tem quatro faces e apenas uma delas tem o número 4).
- $q = \frac{3}{4}$, a probabilidade do insucesso pode ser calculada como $q = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Assim, calculando a probabilidade de sair face 4 exatamente três vezes ($k = 3$), e arredondando o resultado às centésimas, temos:

$$P(X = 3) = {}^5 C_3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \approx 0,09$$

Resposta: **Opção D**

- 2.2. Como o ângulo interno de maior amplitude se opõe ao lado maior do triângulo (concretamente o lado de comprimento 8), podemos calcular o valor de $\cos \alpha$ recorrendo à Lei dos cossenos:

$$8^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \times 5 \times 4 \times \cos \alpha \Leftrightarrow 64 = 25 + 16 - 40 \cos \alpha \Leftrightarrow 40 \cos \alpha = 41 - 64 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{-23}{40}$$

Como α é um ângulo interno de um triângulo ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$), temos que a sua amplitude, em graus, arredondada às unidades, é:

$$\cos^{-1} \left(-\frac{23}{40} \right) \approx 125^\circ$$

Resposta: **Opção D**



3.

- 3.1. Como existem 9 cartões no saco e são retirados simultaneamente 4, o número de conjuntos diferentes de 4 cartões que é possível escolher, ou seja, o número de casos possíveis, é 9C_4

De entre estes 9C_4 conjuntos de 4 cartões, os que contêm apenas os números 3 e 8, e, adicionalmente são compostos por mais dois números compreendidos entre os anteriores (4, 5, 6 e 7) corresponde a considerar o número de conjuntos de dois cartões que podem ser formados com quatro cartões identificados.

Assim, o número de conjuntos compostos pelo cartão 3, pelo cartão 8 e por mais dois cartões cujos números estão compreendidos entre estes - ou seja, o número de casos favoráveis - é 4C_2

Desta forma, a probabilidade de o menor dos números saídos ser 3 e o maior ser 8, é:

$$p = \frac{{}^4C_2}{{}^9C_4} = \frac{1}{21}$$

Resposta: **Opção B**

- 3.2. Nas condições indicadas pretende-se colocar os cartões numa fila que pode ser dividida em duas partes - a primeira com três posições e a segunda com seis posições.

Como na primeira parte da fila existem três posições onde podem ser colocados quatro cartões (2, 3, 5, e 7), e a ordem dos cartões é relevante, o número de formas diferentes de ocupar os três primeiros lugares da fila é 4A_3

Para a segunda parte da fila, com seis posições, existem 6 números disponíveis para os ocupar (o número primo que não foi colocado antes e todos os restantes), pelo que o número de disposições dos lugares é ${}^6A_6 = P_6 = 6!$

Assim, o número de maneiras diferentes de colocar os cartões, de modo que os números inscritos nos três primeiros cartões sejam primos, é:

$${}^4A_3 \times {}^6A_6 = 17280$$

4. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um aluno da turma, e os acontecimentos:

Q : «O aluno está matriculado na disciplina de Química»

H : «O aluno é um rapaz»

Temos que $P(\bar{H}) = 2 \times P(Q)$; $P(\bar{H}|Q) = \frac{1}{3}$ e $P(\bar{Q}|H) = \frac{1}{2}$

Assim, considerando $P(Q) = k$ e organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P(\bar{H}) = 2k$
- $P(\bar{H} \cap Q) = P(Q) \times P(\bar{H}|Q) = k \times \frac{1}{3} = \frac{k}{3}$
- $P(H) = 1 - P(\bar{H}) = 1 - 2k$
- $P(\bar{Q} \cap H) = P(H) \times P(\bar{Q}|H) = (1 - 2k) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - k$
- $P(H \cap Q) = P(H) - P(\bar{Q} \cap H) = 1 - 2k - \left(\frac{1}{2} - k\right) = 1 - 2k - \frac{1}{2} + k = \frac{1}{2} - k$

	Q	\bar{Q}	
H	$\frac{1}{2} - k$	$\frac{1}{2} - k$	$1 - 2k$
\bar{H}	$\frac{k}{3}$		$2k$
	k		1

Assim, temos que probabilidade do aluno escolhido ao acaso estar matriculado na disciplina de Química é o valor de k , ou seja a solução da equação:

$$P(Q) = P(H \cap Q) + P(\bar{H} \cap Q) \Leftrightarrow k = \frac{1}{2} - k + \frac{k}{3} \Leftrightarrow 6k = 3 - 6k + 2k \Leftrightarrow 10k = 3 \Leftrightarrow k = \frac{3}{10}$$



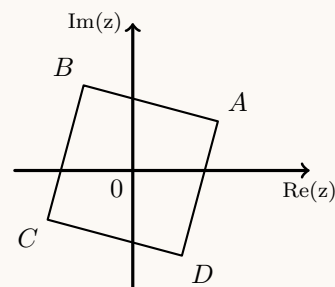
5. Como os pontos A e C são equidistantes da origem e o respetivo ponto médio é a origem, temos que são afijos de números complexos simétricos, ou seja, $z_1 = -z_3$ (alternativamente podemos verificar que $-z_1 = z_1 \times i^2 = z_1 \times i \times i = z_2 \times i = z_3$)

De forma análoga temos que os pontos B e D são afijos de números complexos simétricos, ou seja, $z_2 = -z_4$

Assim, temos que

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = z_1 + z_2 - z_1 - z_2 = 0$$

Resposta: **Opção A**



6. Considerando como a base do triângulo o lado $[AB]$, temos que:

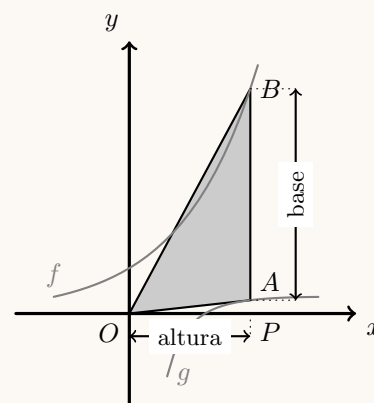
$$\overline{AB} = f(a) - g(a) = e^a - \frac{\ln a}{a}$$

Considerando o ponto P (de ordenada nula e abcissa a), temos que a altura correspondente à base anterior é $[OP]$, e que:

$$\overline{OP} = a$$

Pelo que a área do triângulo $[OAB]$ é dada, em função de a , por:

$$A_{[OAB]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{OP}}{2} = \frac{\left(e^a - \frac{\ln a}{a}\right) \times a}{2} = \frac{ae^a - \ln a}{2}, (a > 1)$$

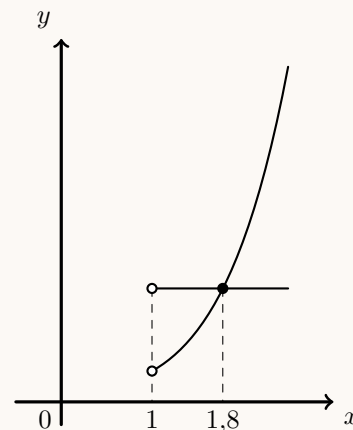


Assim, o valor de a para o qual a área do triângulo $[OAB]$ é igual a 5, é a solução da equação:

$$\frac{ae^a - \ln a}{2} = 5$$

Desta forma, visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função $y = \frac{xe^x - \ln x}{2}$, e a reta horizontal de equação $y = 5$, numa janela compatível com a restrição do valor de a ($x > 1$), (reproduzido na figura ao lado), e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos um valor aproximado (às décimas) para a abcissa do ponto de interseção, ou seja, a solução da equação:

$$x \approx 1,8$$



7. Observando a expressão da sucessão, temos que:

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = \frac{(-1)^n \times (-1)^1}{n+1} = -\frac{(-1)^n}{n+1} = \begin{cases} -\frac{1}{n+1} & \text{se } n \text{ par} \\ \frac{1}{n+1} & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Desta forma, quando n é ímpar, todos os termos são positivos, pelo que, $u_n > -0,01$

Quando n é par, temos que:

$$\begin{aligned} u_n > -0,01 &\Leftrightarrow -\frac{1}{n+1} > -\frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} - \frac{1}{100} < 0 \Leftrightarrow \frac{100 - n - 1}{100(n+1)} < 0 \stackrel{100(n+1) > 0}{\Rightarrow} \\ &\Rightarrow 100 - n - 1 < 0 \Leftrightarrow -n < -99 \Leftrightarrow n > 99 \end{aligned}$$

Ou seja, os termos da sucessão (u_n) são maiores do que $-0,01$ para ordens pares superiores a 99 e também para todas as ordens ímpares, ou seja, a menor ordem a partir da qual todos os termos da sucessão (u_n) são maiores do que $-0,01$ é 99.

8. Como a função é contínua em \mathbb{R} , também é contínua em $x = 1$, pelo que

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = k$, calculando $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x^2+x-2} = \frac{1-1}{1+1-2} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)}$$

Verificando que $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$, usando, por exemplo, a fórmula resolvente, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x^2+x-2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

Assim, como $f(1) = k$, e f é contínua, temos que $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}$

Resposta: **Opção C**



Caderno 2

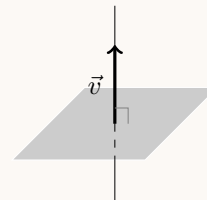
9.

9.1. Reescrevendo a equação da reta r , temos que:

$$1 - x = y \wedge z = 3 \Leftrightarrow \frac{x-1}{-1} = \frac{y-0}{1} \wedge z = 3$$

O que nos permite identificar um vetor diretor da reta, $\vec{v}_r = (-1, 1, 0)$

Como o plano deve ser perpendicular à reta r , o vetor diretor da reta deve ser colinear com o vetor normal do plano.



Assim, identificando os vetores normais dos planos relativos a cada opção apresentada, e identificando qual deles é colinear com o vetor diretor da reta, temos:

- Vetor normal do plano: $\vec{u}_A = (1, 1, 0)$
- Vetor normal do plano: $\vec{u}_B = (1, -1, 0) = -(-1, 1, 0) = -\vec{v}_r$
- Vetor normal do plano: $\vec{u}_C = (1, 1, 3)$
- Vetor normal do plano: $\vec{u}_D = (1, -1, 3)$

Resposta: **Opção B**

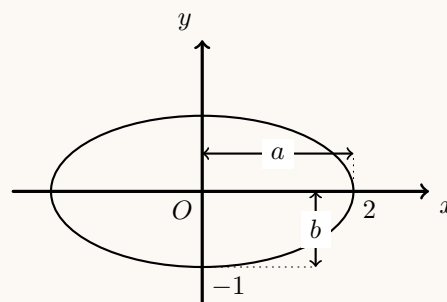
9.2. Como a elipse é simétrica em relação aos eixos coordenados, os pontos identificados (por estarem sobre os eixos são vértices da elipse).

Assim, temos que a medida do semieixo maior é $a = 2$ e que a medida do semieixo menor é $b = 1$. Desta forma a semidistância focal (c) pode ser calculada por:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow 2^2 = 1^2 + c^2 \Leftrightarrow 4 - 1 = c^2 \underset{c > 0}{\Rightarrow} c = \sqrt{3}$$

Ou seja a distância focal é:

$$2c = 2\sqrt{3}$$

Resposta: **Opção B**

10. Escrevendo $1 + i$ na f.t. temos $1 + i = \rho e^{i\theta}$, onde:

- $\rho = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{1} = 1$; como $\operatorname{sen} \theta > 0$ e $\operatorname{cos} \theta > 0$, θ é um ângulo do 1º quadrante, logo
 $\theta = \frac{\pi}{4}$

E assim $1 + i = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4})}$, pelo que:

$$(1 + i)^4 = \left(\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4})}\right)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 \times e^{i(4 \times \frac{\pi}{4})} = 4e^{i\pi} = -4$$

Assim, simplificando a expressão de z , como $i^{15} = i^{4 \times 3 + 3} = i^3 = -i$, temos que:

$$\begin{aligned} z &= \frac{5 + (1 + i)^4}{2 + 2i^{15}} - \frac{i}{2} = \frac{5 + (-4)}{2 + 2(-i)} - \frac{i}{2} = \frac{1}{2 - 2i} - \frac{i}{2} = \frac{2}{4 - 4i} - \frac{2i - 2i^2}{4 - 4i} = \frac{2 - 2i - (-2 \times (-1))}{4 - 4i} = \\ &= \frac{-2i}{4 - 4i} = \frac{-i}{2 - 2i} = \frac{-i(2 + 2i)}{(2 - 2i)(2 + 2i)} = \frac{-2i - 2i^2}{2^2 - (2i)^2} = \frac{-2i - 2(-1)}{4 - 4 \times (-1)} = \frac{2 - 2i}{8} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i \end{aligned}$$

Escrevendo z na forma trigonométrica ($w = \rho e^{i\theta}$) temos:

- $\rho = |z| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{2}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = -1$; como $\operatorname{sen} \theta < 0$ e $\operatorname{cos} \theta > 0$, θ é um ângulo do 4º quadrante, logo $\theta = -\frac{\pi}{4}$

Assim $z = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{i(-\frac{\pi}{4})}$, e z^n é dado por:

$$z^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n e^{i(n \times (-\frac{\pi}{4}))}$$

Para que z^n seja um número real negativo, $\operatorname{Arg}(z^n) = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Assim, atribuindo valores a n , temos que:

- $n = 1, \operatorname{Arg}(z^n) = 1 \times \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4} (\neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z})$
- $n = 2, \operatorname{Arg}(z^n) = 2 \times \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{2\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} (\neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z})$
- $n = 3, \operatorname{Arg}(z^n) = 3 \times \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3\pi}{4} (\neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z})$
- $n = 4, \operatorname{Arg}(z^n) = 4 \times \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{4\pi}{4} = -\pi$

Desta forma, o menor número natural n para o qual z^n é um número real negativo é 4

11. Como $(f \circ g)(x) = 7$ e $f(x) = 2x + 1$, temos que:

$$(f \circ g)(x) = 7 \Leftrightarrow f(g(x)) = 7 \Leftrightarrow 2(g(x)) + 1 = 7 \Leftrightarrow 2(g(x)) = 7 - 1 \Leftrightarrow g(x) = \frac{6}{2} \Leftrightarrow g(x) = 3$$

Resposta: **Opção B**



12.

12.1. Temos que:

- Pelas leis de De Morgan temos que $P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A \cap B}) = \frac{8}{9}$
- Pelo teorema do acontecimento contrário, $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = \frac{8}{9}$
- Como são independentes ($P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$) vem que $1 - P(A \cap B) = 1 - (P(A) \times P(B)) = \frac{8}{9}$
- Como os acontecimentos são equiprováveis ($P(B) = P(A)$), vem que $1 - (P(A) \times P(A)) = \frac{8}{9}$

Assim, resolvendo a equação temos:

$$1 - (P(A) \times P(A)) = \frac{8}{9} \Leftrightarrow (P(A))^2 = 1 - \frac{8}{9} \Leftrightarrow (P(A))^2 = \frac{1}{9} \underset{P(A) > 0}{\Leftrightarrow} P(A) = \sqrt{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{3}$$

Resposta: **Opção C**

12.2. Calculando o limite da sucessão, temos:

$$\lim \left(\left(\frac{n+2}{n} \right)^{\frac{n}{4}} \right) = \lim \left(\left(\frac{n}{n} + \frac{2}{n} \right)^{n \times \frac{1}{4}} \right) = \lim \left(\left(\left(1 + \frac{2}{n} \right)^n \right)^{\frac{1}{4}} \right) = \left(\lim \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n \right)^{\frac{1}{4}} = (e^2)^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{1}{2}}$$

Assim, temos que:

$$\lim f(u_n) = \lim_{x \rightarrow e^{\frac{1}{2}}} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^{\frac{1}{2}}} \ln x = \ln \left(e^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2}$$

Resposta: **Opção C**

13.

13.1. Como o declive da reta tangente é igual ao valor da derivada, começamos por determinar a derivada da função para $x = -1$:

$$\begin{aligned} (x \ln(1-x))' &= (x)' \ln(1-x) + x(\ln(1-x))' = 1 \times \ln(1-x) + x \times \frac{(1-x)'}{1-x} = \\ &= \ln(1-x) + x \times \frac{0-1}{1-x} = \ln(1-x) - \frac{x}{1-x} \end{aligned}$$

Logo, o declive da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa -1 é:

$$g'(-1) = \ln(1 - (-1)) - \frac{-1}{1 - (-1)} = \ln 2 + \frac{1}{2} = 0,5 + \ln 2$$

Resposta: **Opção A**

13.2. Começamos por determinar o declive da assíntota oblíqua do gráfico de g , quando $x \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1-3x}{1-e^{-x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-3x}{x(1-e^{-x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1-3x}{x} \times \frac{1}{1-e^{-x}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-3x}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{3x}{x} \right) \times \frac{1}{1-e^{-(+\infty)}} = \\ &= \left(\frac{1}{+\infty} - 3 \right) \times \frac{1}{1-e^{-\infty}} = (0-3) \times \frac{1}{1-0} = -3 \times 1 = -3 \end{aligned}$$

Calculando o valor da ordenada na origem, temos que:

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - (-3)x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1-3x}{1-e^{-x}} + 3x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1-3x}{1-e^{-x}} + \frac{3x(1-e^{-x})}{1-e^{-x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-3x+3x-3xe^{-x}}{1-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-3xe^{-x}}{1-e^{-x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-3x \times \frac{1}{e^x}}{1-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{3x}{e^x}}{1-e^{-x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3x}{e^x} \right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-e^{-x})} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{e^x}}{1-e^{-(+\infty)}} = \\ &= \frac{1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{e^x}}{1-0} = \frac{1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\frac{e^x}{x}}}{1-0} = \frac{1 - \frac{3}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}}}{1-0} = \frac{1 - \frac{3}{+\infty}}{1-0} = \frac{1-0}{1} = 1-0 = 1 \end{aligned}$$

Desta forma a equação reduzida da assíntota oblíqua do gráfico de g , quando $x \rightarrow +\infty$, é:

$$y = -3x + 1$$

14.

14.1. Como $\sin(\pi - x) = \sin x$ e $\cos(\pi - x) = -\cos x$, calculando o valor do limite, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\pi - x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(\pi - x)}{2 + \cos(\pi - x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{2 - \cos x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x(2 - \cos x)} = \frac{\sin 0^+}{0(2 - \cos 0)} = \frac{0}{0} \text{ (Indet.)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x(2 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{2 - \cos x} \right) = \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 - \cos x} = \\ &= 1 \times \frac{1}{2 - \cos 0} = 1 \times \frac{1}{2 - 1} = 1 \times \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$



14.2. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f , no intervalo $]0, \pi[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x} \right)' = \frac{(\operatorname{sen} x)'(2 + \cos x) - \operatorname{sen} x(2 + \cos x)'}{(2 + \cos x)^2} = \\ &= \frac{\cos x(2 + \cos x) - \operatorname{sen} x((2)'+(\cos x)')}{(2 + \cos x)^2} = \frac{2 \cos x + \cos^2 x - \operatorname{sen} x(0 - \operatorname{sen} x)}{(2 + \cos x)^2} = \\ &= \frac{2 \cos x + \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{(2 + \cos x)^2} = \frac{2 \cos x + 1}{(2 + \cos x)^2} \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada, no domínio da função ($]0, \pi[$), vem:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{2 \cos x + 1}{(2 + \cos x)^2} = 0 \Leftrightarrow 2 \cos x + 1 = 0 \wedge \underbrace{(2 + \cos x)^2 \neq 0}_{\text{condição universal}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 \cos x = -1 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \\ &x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como se pretende identificar os valores de $x \in]0, \pi[$, atribuindo valores inteiros a k para identificar as soluções no intervalo definido, temos:

- $k = 0 \rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \vee x = -\frac{2\pi}{3} \quad \left(-\frac{2\pi}{3} \notin]0, \pi[\right)$
- $k = 1 \rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi = -\frac{2\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \quad \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi \notin]0, \pi[\text{ e } \frac{4\pi}{3} \notin]0, \pi[\right)$

Assim, temos que $f'(x)$ tem um zero em $]0, \pi[$ e estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$2 \cos x + 1$	n.d.	+	0	-	n.d.
$(2 + \cos x)^2$	n.d.	+	+	+	n.d.
$f'(x)$	n.d.	+	0	-	n.d.
$f(x)$	n.d.	\nearrow	Máx	\searrow	n.d.

Cálculos auxiliares:

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{2 \cos \frac{\pi}{2} + 1}{(2 + \cos \frac{\pi}{2})^2} = \frac{2 \times 0 + 1}{(2 + 0)^2} = \\ &= \frac{1}{4} > 0 \\ f'\left(\frac{5\pi}{6}\right) &= \frac{2 \cos \frac{5\pi}{6} + 1}{(2 + \cos \frac{5\pi}{6})^2} = \\ &= \frac{2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1}{(2 + \frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{-\sqrt{3} + 1}{\left(\frac{4 + \sqrt{3}}{2}\right)^2} < 0 \end{aligned}$$

Assim, podemos concluir que a função f , no intervalo $]0, \pi[$:

- é crescente no intervalo $\left]0, \frac{2\pi}{3}\right]$;
- é decrescente no intervalo $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right[$;
- tem um máximo relativo para $x = \frac{2\pi}{3}$, cujo valor é:

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}}{2 + \cos \frac{2\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



15. Designando por M o ponto médio do lado $[AB]$ e por α o ângulo $F\hat{E}M$, (como indicado na figura ao lado), e ainda, considerando o ponto P como a projeção ortogonal do ponto F sobre o segmento de reta EM , usando a definição de cosseno, temos que:

$$\cos \alpha = \frac{\overline{EP}}{\overline{EF}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\overline{EP}}{3,5} \Leftrightarrow \overline{EP} = 3,5 \cos \alpha$$

Assim, como $\overline{EM} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{9}{2} = 4,5$ cm, e considerando o segmento de reta EM como o lado origem do ângulo α , temos que a distância do ponto F à reta AB , t horas após as zero horas, é dada por:

$$h(t) = \overline{EM} - \overline{EP} = 4,5 - 3,5 \cos \alpha$$

Estabelecendo a proporção do tempo, em horas, com a amplitude do ângulo α correspondente, temos que:

$$\frac{12}{2\pi} = \frac{t}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\pi \times t}{12} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi \times t}{6} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} t$$

Ou seja, definindo a função h em função de t , temos:

$$h(t) = 4,5 - 3,5 \cos \left(\frac{\pi}{6} t \right)$$

