

Exame final nacional de Matemática A (2019, 1.ª fase)  
Proposta de resolução



---

Caderno 1

---

1.

1.1. Calculando as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{AV}$ , e a sua norma:

$$\overrightarrow{AV} = V - A = (3, -1, 2) - (2, 1, 0) = (1, -2, 2)$$

$$\|\overrightarrow{AV}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

Calculando as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{AC}$ , e a sua norma:

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0, -1, 2) - (2, 1, 0) = (-2, -2, 2)$$

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4 + 4 + 4} = \sqrt{12}$$

Recorrendo à fórmula do produto escalar vem:

$$\cos(\overrightarrow{AV}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AV} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AV}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{(1, -2, 2) \cdot (-2, -2, 2)}{3\sqrt{12}} = \frac{-2 + 4 + 4}{3\sqrt{12}} = \frac{6}{3\sqrt{12}} = \frac{2}{\sqrt{12}}$$

Logo, a amplitude do ângulo  $VAC$ , em graus, arredondado às unidades, é

$$V\hat{A}C = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{12}}\right) \approx 55^\circ$$

- 1.2. Como a pirâmide é quadrangular regular, considerando  $M$  o ponto centro da base, ou seja o ponto médio do segmento  $[AC]$ , temos que o vetor  $\overrightarrow{MV}$  é perpendicular ao plano que contém a base, ou seja, é um vetor normal do plano que contém a base da pirâmide.

Determinando as coordenadas do ponto  $M$ , temos:

$$\left( \frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}, \frac{z_A + z_C}{2} \right) = \left( \frac{2 + 0}{2}, \frac{1 + (-1)}{2}, \frac{0 + 2}{2} \right) = (1, 0, 1)$$

Calculando as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{MV}$ , temos:

$$\overrightarrow{MV} = V - M = (3, -1, 2) - (1, 0, 1) = (2, -1, 1)$$

Desta forma, a equação do plano é da forma:

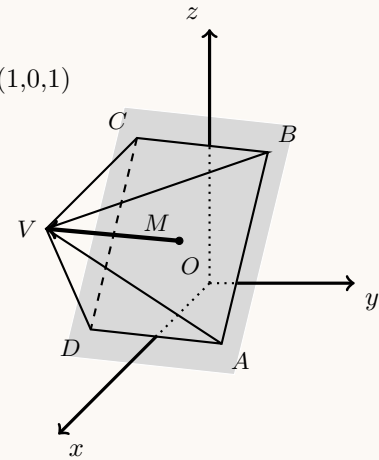
$$2x - y + z + d = 0$$

E como o ponto  $A$  pertence ao plano, podemos determinar o valor do parâmetro  $d$ , substituindo as coordenadas, na equação anterior:

$$2(2) - 1 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow 4 - 1 + d = 0 \Leftrightarrow 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -3$$

E assim, a equação do plano é:

$$2x - y + z - 3 = 0$$



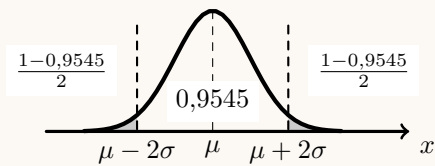
2.

- 2.1. Como  $\mu = 5$  e  $\sigma = \frac{1}{2}$ , então  $P(X > 6) = P(X > 5 + 2 \times \frac{1}{2}) = P(X > \mu + 2\sigma)$

Assim, temos que  $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$  e como  $P(X < \mu - 2\sigma) = P(X > \mu + 2\sigma)$ , temos que:

$$P(X > 6) = P(X > \mu + 2\sigma) \approx \frac{1 - 0,9545}{2} \approx 0,023$$

Resposta: **Opção C**



- 2.2. Calculando o valor do limite, vem que:

$$\lim \left( \frac{n-2}{n} \right)^{3n} = \lim \left( \frac{n}{n} + \frac{-2}{n} \right)^{3n} = \left( \lim \left( 1 + \frac{-2}{n} \right)^n \right)^3 = (e^{-2})^3 = e^{-2 \times 3} = e^{-6} = \frac{1}{e^6}$$

Resposta: **Opção C**



3.

3.1. Considerando a experiência aleatória que consiste em retirar, ao acaso, uma bola da caixa, e os acontecimentos:

- $A$ : A bola ser amarela
- $L$ : A bola ter o logotipo desenhado

Designando por  $n$  o número de bolas que a caixa contém, de acordo com o enunciado, temos que:

- $P(A) = \frac{10}{n}$
- $P(L|A) = \frac{3}{10}$
- $P(\bar{A} \cup \bar{L}) = \frac{15}{16}$

Desta forma, usando as leis de DeMorgan, e a probabilidade do acontecimento contrário, temos que:

$$P(\bar{A} \cup \bar{L}) = P(\overline{A \cap L}) = 1 - P(A \cap L)$$

E assim, vem que:

$$P(\bar{A} \cup \bar{L}) = \frac{15}{16} \Leftrightarrow 1 - P(A \cap L) = \frac{15}{16} \Leftrightarrow 1 - \frac{15}{16} = P(A \cap L) \Leftrightarrow \frac{1}{16} = P(A \cap L)$$

Logo, recorrendo à definição de probabilidade condicionada, podemos determinar o valor de  $n$ , ou seja, o número de bolas que a caixa contém:

$$P(L|A) = \frac{P(L \cap A)}{P(A)} \Leftrightarrow \frac{3}{10} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{10}{n}} \Leftrightarrow \frac{3 \times 10}{10 \times n} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \frac{3}{n} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow 16 \times 3 = n \Leftrightarrow 48 = n$$

3.2. Como existem 10 posições na fila e pretendemos observar as posições em ficam as 3 bolas com logotipo serão colocadas, podemos considerar apenas as 3 posições que serão ocupadas pelas bolas com logotipo, de entre as 10 posições, considerando as restantes posições irrelevantes porque serão ocupadas por bolas indistinguíveis. Assim, o número de conjuntos de 3 posições que é possível escolher, ou seja, o número de casos possíveis, é  ${}^{10}C_3$

De entre estes  ${}^{10}C_3$  conjuntos de posições, os que correspondem a três posições adjacentes, são 8 (considerando o bloco de três bolas como único, só existem 8 posições - as setes posições de bolas sem logotipo e a posição ocupada pelo bloco de bolas com logotipo), pelo que a probabilidade de as três bolas com o logotipo desenhado ficarem juntas, é:

$$p = \frac{8}{{}^{10}C_3} = \frac{1}{15}$$

Resposta: **Opção B**



4. Para que os números sejam ímpares e maiores do que seis milhões, têm que, cumulativamente, ter o primeiro algarismo maior ou igual a 6 e o último algarismo ímpar.

Como só existe um algarismo 7, os números ímpares que se podem formar maiores que sete milhões, devem terminar em 5, pelo que usando o 7 para o algarismo dos milhões e um dos 5 para o algarismo das unidades, restam escolher a posição do outro algarismo 5, de entre as 5 posições disponíveis, sendo que as restantes posições serão ocupadas por algarismos 6. Assim, nestas condições o número de números ímpares que se podem formar maiores que sete milhões é:  ${}^5C_1 = 5$

Caso o algarismo dos milhões seja um 6, podemos considerar a hipótese do algarismo das unidades ser o 7, e neste caso, a contagem do número de hipóteses corresponde a escolher 2 das 5 posições restantes onde devem figurar os algarismos 5, ou seja,  ${}^5C_2 = 10$

Ainda no caso do algarismo dos milhões ser um 6, devemos considerar a hipótese do algarismo das unidades ser 5, e nesse caso será necessário escolher uma posição para o 5 restante, de entre as 5 posições restantes e outra para o 7, de entre as 4 restantes, ou seja,  ${}^5C_1 \times {}^4C_1 = 20$

Assim, o número de números ímpares e maiores do que seis milhões, de acordo com as restrições do enunciado, é:

$${}^5C_1 + {}^5C_2 + {}^5C_1 \times {}^4C_1 = 5 + 10 + 20 = 35$$

5. Como a lente de contacto foi obtida a partir de superfícies esféricas com 7 mm e 8 mm de raio, e  $r_2 > r_1$ , temos que  $r_2 = 8$  e  $r_1 = 7$ .

Assim, temos que:

$$\frac{\sqrt{[(7+8)^2 - x^2][x^2 - (7-8)^2]}}{x}, \text{ com } 8-7 < x < \sqrt{8^2 - 7^2}$$

Ou seja:

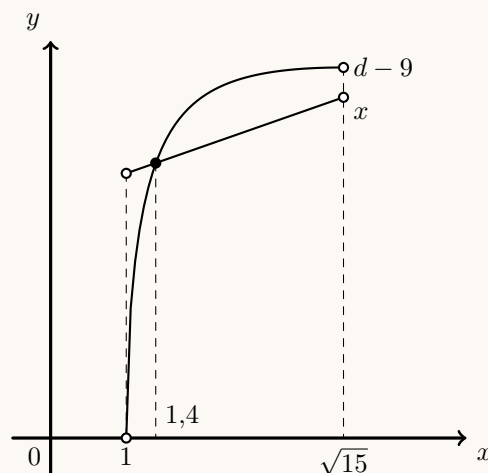
$$\frac{\sqrt{(225 - x^2)(x^2 - 1)}}{x}, \text{ com } 1 < x < \sqrt{15}$$

Como o diâmetro da lente  $d$  excede em 9 mm a distância entre os centros das duas superfícies esféricas, ou seja,  $x$ , temos que:

$$d = x + 9 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(225 - x^2)(x^2 - 1)}}{x} = x + 9$$

Visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função  $d$  e a reta  $y = x + 9$ , para os valores de  $x$  indicados,  $1 < x < \sqrt{15}$ , (reproduzidos na figura ao lado), e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos, obtemos um valor aproximado (às décimas) da abscissa do ponto de interseção, ou seja, a solução da equação:

$$x \approx 1,4$$



6. Como  $z = -1 + 2i$ , temos que  $\bar{z} = -1 - 2i$

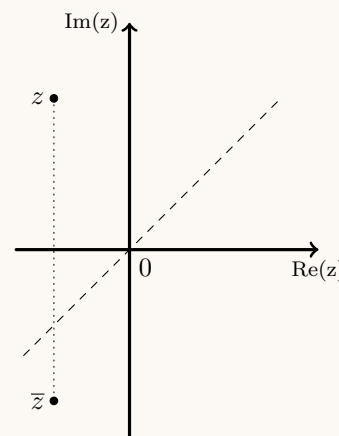
Como  $\text{Re}(z) < 0$  e  $\text{Im}(z) < 0$ , temos que  $\theta$  é um ângulo do 3º quadrante, ou seja,  $\theta \in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[$ , pelo que  $\theta < \frac{3\pi}{2}$

Por outro lado, como  $\text{tg } \theta = \frac{-2}{-1} = 2$ , ou seja,  $\text{tg } \theta > 1$ , temos que  $\theta > \frac{5\pi}{4}$

Assim, vem que:

$$\theta \in \left] \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right[$$

Resposta: **Opção D**



7. Designado por  $a$  o maior dos dois termos considerados da progressão geométrica, e por  $b$  o menor, como a razão é  $r$ , temos que:

$$\frac{a}{b} = r \Leftrightarrow a = b \times r$$

Como a soma dos termos é 12, temos que:  $a + b = 12 \Leftrightarrow b \times r + b = 12 \Leftrightarrow b \times r = 12 - b$

Como a diferença dos termos é 3, temos que:  $a - b = 3 \Leftrightarrow b \times r - b = 3 \Leftrightarrow b \times r = 3 + b$

Assim, por transitividade das duas igualdades anteriores, temos que:

$$12 - b = 3 + b \Leftrightarrow 12 - 3 = b + b \Leftrightarrow 9 = 2b \Leftrightarrow \frac{9}{2} = b$$

Substituindo o valor de  $b$  na igualdade  $b \times r - b = 3$ , e resolvendo a equação, obtemos o valor de  $r$ :

$$\frac{9}{2} \times r = 3 + \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{9}{2} \times r = \frac{6}{2} + \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{9}{2} \times r = \frac{15}{2} \Leftrightarrow r = \frac{15 \times 2}{2 \times 9} \Leftrightarrow r = \frac{5}{3}$$

8. Usando as propriedades dos logaritmos, temos que:

$$\ln(a^2 - b^2) - 2\ln(a + b) = \ln(a^2 - b^2) - \ln(a + b)^2 = \ln \frac{a^2 - b^2}{(a + b)^2} = \ln \frac{(a + b)(a - b)}{(a + b)(a + b)} = \ln \frac{a - b}{a + b}$$

Como  $a + b = 2(a - b)$ , obtendo o valor da aproximação com a calculadora, temos que:

$$\ln \frac{a - b}{a + b} = \ln \frac{a - b}{2(a - b)} = \ln \frac{1}{2} \approx -0,7$$

Resposta: **Opção C**

## Caderno 2

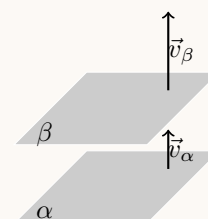
9.

9.1. Observando as equações dos planos  $\alpha$  e  $\beta$ , podemos verificar que os respetivos vetores normais ( $\vec{v}_\alpha = (1,1,1)$  e  $\vec{v}_\beta = (2,2,2)$ ) são colineares, porque:  $\vec{v}_\beta = 2\vec{v}_\alpha$

Desta forma, como as duas equações não são equivalentes, podemos concluir que os planos  $\alpha$  e  $\beta$  são estritamente paralelos.

Logo, não existem pontos em comum entre estes dois planos, pelo que também não existem pontos em comum aos três planos, ou seja, a intersecção dos planos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  é o conjunto vazio.

Resposta: **Opção A**



9.2. Como a área do círculo é  $9\pi$ , podemos calcular a medida do raio ( $r$ ), recorrendo à fórmula da área:

$$A_o = \pi r^2 \Leftrightarrow \pi r^2 = 9\pi \Leftrightarrow r^2 = \frac{9\pi}{\pi} \underset{r \geq 0}{\Rightarrow} r = \sqrt{9} \Rightarrow r = 3$$

Assim, relativamente à elipse, podemos verificar que o semieixo menor (vertical) tem comprimento 3 ( $b = 3$ ), tal como a semidistância focal ( $c = 3$ ).

Calculando o comprimento de  $a$ , semieixo maior (horizontal), vem que:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 = 3^2 + 3^2 \Leftrightarrow a^2 = 9 + 9 \Leftrightarrow a^2 = 18 \underset{a \geq 0}{\Rightarrow} a = \sqrt{18}$$

Logo, a equação da elipse é:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{18}^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Resposta: **Opção A**

10. Simplificando a expressão de  $w$ , como  $i^6 = i^{4+2} = i^4 \times i^2 = 1 \times (-1) = -1$ , e  $\bar{z}_1 = 3 - 4i$  temos que:

$$\begin{aligned} w &= \frac{3 + 4i + (-1) + 2(3 - 4i)}{3 + 4i - (4 + 6i)} = \frac{3 + 4i - 1 + 6 - 8i}{3 + 4i - 4 - 6i} = \frac{8 - 4i}{-1 - 2i} = \frac{(8 - 4i)(-1 + 2i)}{(-1 - 2i)(-1 + 2i)} = \\ &= \frac{-8 + 16i + 4i - 8i^2}{(-1)^2 - (2i)^2} = \frac{-8 + 20i - 8(-1)}{1 - 4i^2} = \frac{-8 + 20i + 8}{1 - 4(-1)} = \frac{20i}{1 + 4} = \frac{20i}{5} = 4i \end{aligned}$$

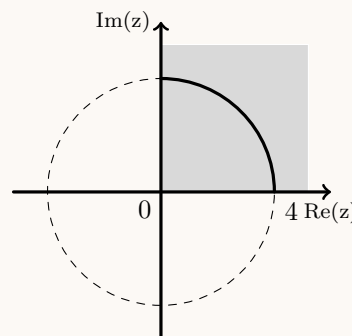
Assim, temos que:

$$|w| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$$

E a condição  $|z| = |w| \Leftrightarrow |z| = 4$  define uma circunferência de centro na origem e raio 4, pelo que a condição  $|z| = |w| \wedge \text{Im } z \geq 0 \wedge \text{Re } z \geq 0$  corresponde a um quarto da circunferência anterior.

Desta forma o comprimento da linha definido pela condição é um quarto do perímetro da circunferência:

$$\frac{P_o}{4} = \frac{2\pi r}{4} = \frac{2\pi \times 4}{4} = 2\pi$$



11. Simplificando a equação, temos:

$$2 \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \cos x = -1 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$$

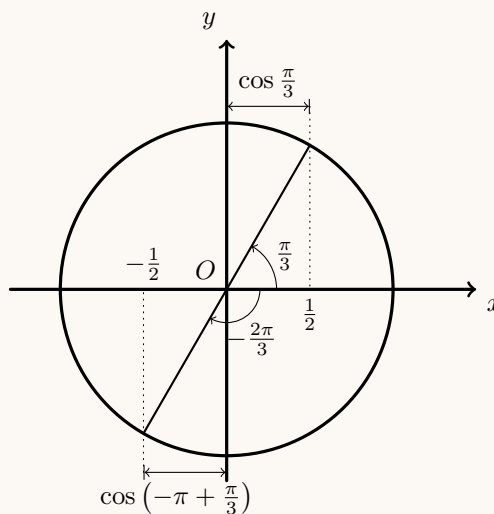
Como  $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ , podemos observar no círculo trigonométrico que:

$$\cos\left(-\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

Pelo que a solução da equação no intervalo  $[-\pi, 0]$  é:

$$x = -\frac{2\pi}{3}$$

Resposta: **Opção B**



12.

12.1. Organizando todas as somas possíveis numa tabela, temos:

	-1	1	1	1	1	1
-1	-2	0	0	0	0	0
1	0	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2

Logo, pela observação da tabela, podemos observar os valores possíveis para a soma e as respectivas probabilidades:

- $P(X = -2) = \frac{1}{36}$
- $P(X = 0) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$
- $P(X = 2) = \frac{25}{36}$

Assim, temos que  $P(X = k) = \frac{5}{18}$ , para  $k = 0$

Resposta: **Opção A**

12.2. Para um oscilador harmónico escrito na forma  $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ ,  $\omega$  é a pulsação, e o período é dado por  $\frac{2\pi}{\omega}$

Assim, no caso deste oscilador harmónico, temos que  $\omega = \pi$ , pelo que o período é:  $\frac{2\pi}{\pi} = 2$

Resposta: **Opção A**



13.

13.1. Para calcular o declive da reta tangente, no ponto de abcissa 1 começamos por determinar a expressão da derivada da função, para  $x > 0$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \frac{x}{x - \ln x} \right)' = \frac{(x)'(x - \ln x) - x(x - \ln x)'}{(x - \ln x)^2} = \frac{1 \times (x - \ln x) - x \left( 1 - \frac{1}{x} \right)}{(x - \ln x)^2} = \\ &= \frac{x - \ln x - x + \frac{x}{x}}{(x - \ln x)^2} \stackrel{x > 0}{=} \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2} \end{aligned}$$

Assim, temos que o declive da reta tangente no ponto de abcissa 1 é:

$$m = f'(1) = \frac{1 - \ln 1}{(1 - \ln 1)^2} = \frac{1 - 0}{(1 - 0)^2} = 1$$

Logo a equação da reta tangente é da forma  $y = 1 \times x + b \Leftrightarrow y = x + b$

Como  $f(1) = f'(1) = \frac{1}{1 - \ln 1} = \frac{1}{1 - 0} = 1$ , sabemos que o ponto  $P(1,1)$  pertence ao gráfico da função e também à reta tangente.

Assim, substituindo as coordenadas do ponto de tangência na equação da reta, podemos calcular o valor de  $b$ :

$$1 = 1 + b \Leftrightarrow 1 - 1 = b \Leftrightarrow 0 = b$$

Pelo que a equação da reta tangente é:

$$y = x - 0 \Leftrightarrow y = x$$

13.2. Para mostrar que a função  $f$  é contínua em  $x = 0$ , temos que verificar que  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ :

- $f(0) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{x}{x - \ln x} \right) = \frac{0^+}{0^+ - \ln 0^+} = \frac{0^+}{0^+ - (-\infty)} = \frac{0^+}{+\infty} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{1 - \cos x}{x} \right) = \frac{1 - \cos(0^-)}{0^-} = \frac{0}{0^-}$  (Indeterminação)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{1 - \cos x}{x} \times \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1^2 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{\sin x \times \sin x}{x \times (1 + \cos x)} \right) = \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 1 \times \frac{\sin 0^+}{1 + \cos 0^+} = 1 \times \frac{0}{1 + 1} = 1 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

Assim, temos que, como  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ , a função  $f$  é contínua em  $x = 0$





14.

14.1. Começamos por determinar a expressão da derivada da função  $g$ , em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ :

$$g'(x) = \left(\frac{e^{-x}}{x}\right)' = \frac{((-x)'e^{-x})x - e^{-x} \times (x)'}{x^2} = \frac{-1 \times e^{-x} \times x - e^{-x} \times 1}{x^2} = \frac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2}$$

Calculando os zeros da derivada da função  $g$ , em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{-x}(-x-1)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(-x-1) = 0 \wedge \underbrace{x^2 \neq 0}_{\text{P.V., pq } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^{-x} = 0}_{\text{Impossível}} \vee -x-1 = 0 \Leftrightarrow -1 = x$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

$x$	$-\infty$	$-1$		$0$	$-\infty$
$e^{-x}$	+	+	+	n.d.	+
$(-x-1)$	+	0	-	n.d.	-
$e^{-x}(-x-1)$	+	0	-	n.d.	-
$x^2$	+	+	+	n.d.	+
$g'(x)$	+	0	-	n.d.	-
$g(x)$	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	n.d.	$\searrow$

Assim, podemos concluir que a função  $g$ :

- é decrescente no intervalo  $] -1, 0]$  e também no intervalo  $[0, +\infty[$ ;
- é crescente no intervalo  $] -\infty, -1]$ ;
- tem um máximo relativo que é  $f(-1) = \frac{e^{-(-1)}}{-1} = \frac{e^1}{-1} = -e$

14.2. Como a função  $h$  tem domínio  $\mathbb{R}^+$ , o e o respetivo gráfico tem uma assíntota oblíqua, o seu declive  $m$ , é o valor de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ 

Assim, calculando o valor do declive, temos:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) + 2x - \frac{1}{\sqrt{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^{-x}}{x} + 2x - \frac{1}{\sqrt{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^{-x}}{x} + \frac{2x}{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) =$$

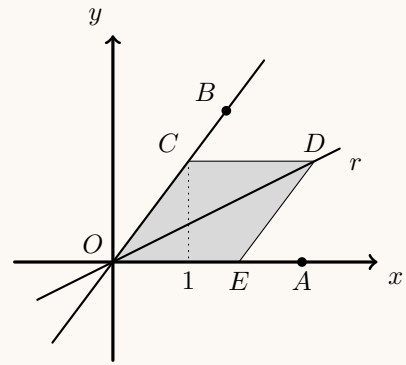
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^{-x}}{x^2} + 2 - \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) = \frac{e^{-(+\infty)}}{+\infty} + 2 - \frac{1}{+\infty \times +\infty} = \frac{0^+}{+\infty} + 2 - \frac{1}{+\infty} = 0 + 2 - 0 = 2$$

Resposta: **Opção B**

15. Identificando que a diagonal de um losango bissecta os ângulos relativos aos vértices que definem essa diagonal, podemos considerar que a reta  $r$  contém a diagonal de um losango  $[OCDE]$ , em que  $C$  é um ponto da reta  $OB$  e  $E$  é um ponto sobre o eixo das abscissas (como na figura ao lado).

Assim, assumindo, sem perda de generalidade que a abscissa do ponto  $C$  é 1, calculamos a ordenada:

$$y_C = \frac{4}{3} \times 1 = \frac{4}{3}$$



Desta forma, como as coordenadas do ponto  $C$  são  $(1, \frac{4}{3})$ , o lado do losango é:

$$\overline{OC} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{9}{9} + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$$

Assim, como  $[OCDE]$  é um losango,  $\overline{OC} = \overline{CD}$ , pelo que a ordenada do ponto  $D$  é  $y_D = \frac{4}{3}$  e a abscissa é  $x_D = 1 + \frac{5}{3} = \frac{8}{3}$

Logo, o declive da reta  $OD$ , ou seja, a reta  $r$ , é:

$$m_r = \frac{y_D - y_O}{x_D - x_O} = \frac{\frac{4}{3} - 0}{\frac{8}{3} - 0} = \frac{3 \times 4}{3 \times 8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Pelo que, como a reta  $r$  contém a origem, a respetiva ordenada na origem é nula, e assim a sua equação reduzida é:

$$y = \frac{1}{2}x$$

