REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | Época Especial | Ensino Secundário | 2018

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Caderno 2

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

5 Páginas

Caderno 2: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.

Não é permitido o uso de calculadora.

10.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 10.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 10.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

10.1. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$,

- a reta r, definida pela condição $\frac{x-1}{2} = \frac{3-y}{5} = \frac{z}{3}$
- o plano α, definido pela equação $3x - 2z - 3 = 0$

Qual é a posição relativa da reta r e do plano α ?

(A) r é estritamente paralela a α

(B) r e α são concorrentes, mas não perpendiculares.

(C) r é perpendicular a α

(D) r está contida em α

PMC2015

10.2. Seja g uma função real, de domínio $[0,1]$

Sabe-se que a função g não tem mínimo.

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) A função g não tem zeros.

(B) A função g não é limitada.

(C) A função g não tem máximo.

(D) A função g não é contínua.

11. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o conjunto

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : z^4 + 16 = 0 \quad \wedge \quad \operatorname{Re}(z) < 0 \right\}$$

Determine os elementos do conjunto A e apresente-os na forma algébrica.

12.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 12.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 12.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

12.1. Um dado cúbico equilibrado tem todas as faces numeradas, umas com o número 0 e as restantes com o número 1

Lança-se o dado três vezes e, em cada lançamento, regista-se o número da face que fica voltada para cima.

Seja X a variável aleatória «produto dos números saídos nos três lançamentos».

A tabela de distribuição de probabilidades da variável X é a seguinte.

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{19}{27}$	$\frac{8}{27}$

Quantas faces estão numeradas com o número 1 ?

(A) Duas. **(B)** Três. **(C)** Quatro. **(D)** Cinco.

PMC2015

12.2. Qual é o valor do limite da sucessão $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n}$?

(A) 1 **(B)** e **(C)** e^2 **(D)** $+\infty$

13. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = x^3 + 6\ln x$

Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;

– as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f

14. Seja h a função, de domínio $\left[-\frac{\pi}{3}, +\infty\right[$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}(x^2)} & \text{se} \quad -\dfrac{\pi}{3} \leq x < 0 \\ \dfrac{e^x}{x+1} & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

14.1. Mostre que a função h é contínua no ponto 0

14.2. Estude a função h quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.

14.3. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) A função h é estritamente decrescente em $[0, +\infty[$

(B) A função h é estritamente crescente em $[0, +\infty[$

(C) A função h tem um máximo para $x = 1$

(D) A função h tem um mínimo para $x = 1$

15. Considere a função f, definida em $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ por $f(x) = \cos x$

Qual dos seguintes conjuntos é o contradomínio da função f?

(A) $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

(B) $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$

(C) $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

(D) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

16. Seja m um número real pertencente ao intervalo $]0,1[$, e seja a um número real positivo.

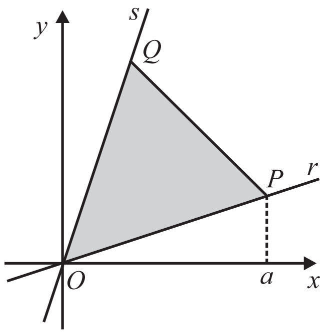

Figura 4

Na Figura 4, estão representadas as retas r e s, que passam na origem do referencial e que têm declives m e $\dfrac{1}{m}$, respetivamente. Estão também representados os pontos P e Q, pertencentes ao primeiro quadrante. O ponto P pertence à reta r, e o ponto Q pertence à reta s

Sabe-se que o ponto P tem abcissa a e que $\overline{OP} = \overline{OQ}$

Mostre que a área do triângulo $[OPQ]$ é dada por $\dfrac{a^2}{2}(1 - m^2)$

FIM

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item											
Cotação (em pontos)											
10.1.	**10.2.**	**11.**	**12.1.**	**12.2.**	**13.**	**14.1.**	**14.2.**	**14.3.**	**15.**	**16.**	
8		12	8		13	13	13	8	8	12	**95**

TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2)	**200**