Exame final nacional de Matemática A (2018, Época especial)

Proposta de resolução

Caderno 1

1.

1.1. Como A e B são acontecimentos equiprováveis, temos que $P(A) = P(B)$

E como A e B são acontecimentos independentes, temos que

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = P(A) \times P(A) = \big(P(A)\big)^2$$

Logo, como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, temos que:

$$0{,}64 = P(A) + P(A) - \big(P(A)\big)^2 \Leftrightarrow \big(P(A)\big)^2 - 2 \times P(A) + 0{,}64 = 0$$

Finalmente, usando a fórmula resolvente para equações do segundo grau, temos que:

$$P(A) = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 0{,}64}}{2 \times 1} \Leftrightarrow P(A) = \frac{2 \pm 1{,}2}{2} \Leftrightarrow P(A) = 1{,}6 \lor P(A) = 0{,}4$$

Como $P(A) \leq 1$, então temos que $P(A) = 0{,}4 = 0{,}40$

Resposta: **Opção B**

1.2. Escrevendo a expressão na forma $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, em que A é a amplitude do oscilador harmónico, temos:

$$x(t) = \operatorname{sen}(\pi t) + \cos(\pi t) = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\big(\operatorname{sen}(\pi t) + \cos(\pi t)\big) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \operatorname{sen}(\pi t) + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \cos(\pi t)\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} \times \operatorname{sen}(\pi t) + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \times \cos(\pi t)\right) = \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{4} + \frac{8\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\pi t + \frac{7\pi}{4}\right)$$

Assim temos que a amplitude A do oscilador é $\sqrt{2}$

Resposta: **Opção B**

2.

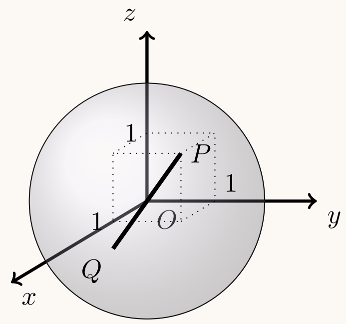
2.1. Determinando as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$ e depois do vetor $\vec{u}$, temos:

$$\overrightarrow{OP} = P - O = (1,1,1) - (0,0,0) = (1,1,1)$$

$$\vec{u} = -2\overrightarrow{OP} = -2(1,1,1) = (-2,-2,-2)$$

Assim, temos que as coordenadas do ponto Q são:

$$Q = P + \vec{u} = (1,1,1) + (-2,-2,-2) = (-1,-1,-1)$$



No contexto do problema, como $[OP]$ é um raio da superfície esférica (porque O é o centro da esfera e P um ponto da superfície esférica), então o ponto $Q = P - 2\overrightarrow{OP} = P + 2\overrightarrow{PO}$ é o ponto simétrico do ponto P relativamente a O, ou seja, $[QP]$ é um diâmetro da superfície esférica.

2.2. Como o ponto R pertence ao semieixo negativo das ordenadas, tem coordenadas da forma $(0,y_R,0)$, com $y_R \in \mathbb{R}^-$. Assim, fazendo a substituição na equação da superfície esférica, podemos calcular o valor de y_R:

$$0^2 + {y_R}^2 + 0^2 = 3 \Leftrightarrow 0 + {y_R}^2 + 0 = 3 \Leftrightarrow y_R = \pm\sqrt{3}$$

Como $y_R \in \mathbb{R}^-$, as coordenadas do do ponto R são $\left(0,-\sqrt{3},0\right)$.

Assim temos que, como O é a origem do referencial $\overrightarrow{OR} = \left(0,-\sqrt{3},0\right)$ e $\overrightarrow{OP} = (1,1,1)$, pelo que:

- $\left\|\overrightarrow{OR}\right\| = \sqrt{0^2 + (-\sqrt{3})^2 + 0^2} = \sqrt{0+3+0} = \sqrt{3}$
- $\left\|\overrightarrow{OP}\right\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

Logo, recorrendo à fórmula do produto escalar vem:

$$\cos\left(\overrightarrow{OR}\hat{\ }\overrightarrow{OP}\right) = \frac{\overrightarrow{OR}\,.\,\overrightarrow{OP}}{\left\|\overrightarrow{OR}\right\| \times \left\|\overrightarrow{OP}\right\|} = \frac{\left(0,-\sqrt{3},0\right).(1,1,1)}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{0-\sqrt{3}+0}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Logo, a amplitude do ângulo ROC, em graus, arredondado às unidades, é:

$$A\hat{O}C = \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 125^\circ$$

3. Se pretendemos formar conjuntos com, pelo menos, três pessoas de entre um conjunto alargado de cinco pessoas, devemos considerar todos os conjuntos de três pessoas, com todos os conjuntos de quatro pessoas e ainda o único conjunto de cinco pessoas, ou seja:

$$^5C_3 +^5 C_4 +^5 C_5 = 10 + 5 + 1 = 16$$

Resposta: **Opção D**

4. Como a soma dos dois últimos elementos da linha do triângulo de Pascal é 35, e o último número é 1, sabemos que o penúltimo número é $35-1=34$. Logo os elementos desta linha são todos da forma ${}^{34}C_k$, pelo que esta linha do triângulo de Pascal tem 35 elementos (${}^{34}C_0; {}^{34}C_1; {}^{34}C_2; {}^{34}C_3; \ldots ; {}^{34}C_{34}$)

   Como se trata de uma linha com um número ímpar de elementos, e pela simetria do triângulo de pascal podemos dividir estes elementos em dois grupos de 17 elementos (iguais dois a dois) e o número que ocupa a posição central, diferente de todos os restantes.

   Assim, escolhendo, ao acaso, dois elementos desta linha, podemos formar ${}^{35}C_2$ pares de números (casos possíveis), sendo que apenas 17 destes pares são compostos por números iguais (casos favoráveis), ou seja, o valor da probabilidade, na forma decimal, arredondado às centésimas, é :

$$\frac{17}{{}^{35}C_2} = 0{,}03$$

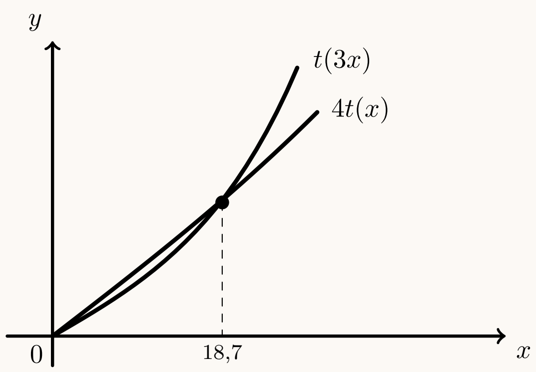
5. Como x é a distância, em metros, do ponto F à reta OC, designando por x_G a distância, em metros, do ponto G à reta OC, temos, de acordo com os dados do enunciado, que:

   - $x_G = 3 \times x$
   - o tempo que o ascensor demora a percorrer o arco que vai de F até G é $t(x_G) - t(x)$, pelo que:

$$t(x_G) - t(x) = 3 \times t(x) \Leftrightarrow t(x_G) = 3 \times t(x) + t(x) \Leftrightarrow t(\underbrace{x_G}_{3x}) = 4 \times t(x) \Leftrightarrow t(3x) = 4t(x)$$

   Assim, visualizando na calculadora gráfica os gráficos das funções $t(3x)$ e $4t(x)$, numa janela compatível com o domínio da função t, reproduzido na figura ao lado, e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos o valor aproximado (às décimas) da abcissa do ponto de interseção, ou seja, a distância, em metros, do ponto F à reta OC:

$$x \approx 18{,}7$$



6. Sabemos que, como $i^0 + i^1 + i^2 + i^3 = 1 + i - 1 - i = 0$ e como $i^n = i^{n+4} (\forall n \in \mathbb{N})$, então a soma de quaisquer quatro parcelas consecutivas é nula.

   O valor pedido é a soma de 2019 parcelas (porque incluí i^0), pelo que, como $2019 = 4 \times 504 + 3$, temos que:

$$i^0 + i^1 + i^2 + \underbrace{i^3 + i^4 + i^5 + i^6}_{0} + \ldots + \underbrace{i^{2017} + i^{2016} + i^{2017} + i^{2018}}_{0} = i^0 + i^1 + i^2 = 1 + i - 1 = i$$

   Resposta: **Opção A**

7. Determinando uma expressão de $u_{n+1} - u_n$ temos

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)+5}{(n+1)+3} - \frac{n+5}{n+3} = \frac{n+6}{n+4}_{(n+3)} - \frac{n+5}{n+3}_{(n+4)} = \frac{(n+6)(n+3)-(n+5)(n+4)}{(n+4)(n+3)} =$$

$$= \frac{n^2+3n+6n+18-\left(n^2+4n+5n+20\right)}{(n+4)(n+3)} = \frac{n^2+3n+6n+18-n^2-4n-5n-20}{(n+4)(n+3)} =$$

$$= \frac{9n+18-9n-20}{(n+4)(n+3)} = \frac{-2}{(n+4)(n+3)}$$

Como $n > 0$, temos que $(n+4)(n+3) > 0$, e como o quociente de um número negativo (-2) por um positivo ($(n+4)(n+3)$), é sempre um valor negativo, temos que

$$u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ou seja, (u_n) é uma sucessão **monótona decrescente**.

8. Como $P(A \cup B) \leq 1$ e $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, temos que:

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow 0{,}6 + 0{,}7 - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow 1{,}3 - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$-P(A \cap B) \leq 1 - 1{,}3 \Leftrightarrow -P(A \cap B) \leq -0{,}3 \Leftrightarrow P(A \cap B) \geq 0{,}3$$

Assim, usando a definição de probabilidade condicionada e como $P(A) = 0{,}6$, vem que:

$$P(A \cap B) \geq 0{,}3 \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \geq \frac{0{,}3}{0{,}6} \Leftrightarrow P(B|A) \geq \frac{3}{6} \Leftrightarrow P(B|A) \geq \frac{1}{2}$$

9. Escrevendo a equação da reta r na forma reduzida, para identificar o valor do declive, temos:

$$ax + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow 2y = -ax - 1 \Leftrightarrow y = \frac{-ax-1}{2} \Leftrightarrow y = -\frac{a}{2}x - \frac{1}{2}, \text{ e assim } m_r = -\frac{a}{2}$$

Calculando o valor do declive da reta s, através das coordenadas do vetor diretor, vem:

$$m_s = \frac{2a}{a} = 2$$

Como as retas r e s são paralelas, os respetivos declives são iguais, pelo que podemos calcular o valor de a:

$$m_r = m_s \Leftrightarrow -\frac{a}{2} = 2 \Leftrightarrow -a = 2 \times 2 \Leftrightarrow a = -4$$

Resposta: **Opção A**

Caderno 2

10.

10.1. Identificando as coordenadas de um vetor diretor da reta r, temos:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{3-y}{5}=\frac{z}{3} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2}=\frac{-(-3+y)}{5}=\frac{z}{3} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-5}=\frac{z}{3}$$

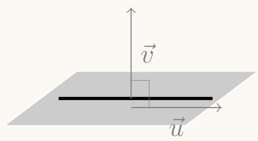
Ou seja, um vetor diretor da reta r é $\overrightarrow{u}=(2,-5,3)$ e como $3x-2z-3=0 \Leftrightarrow 3x+0y-2z-3=0$ então um vetor normal do plano α é $\overrightarrow{v}=(3,0,-2)$

Calculando o produto escalar dos dois vetores temos:

$$\vec{u}\,.\,\vec{v}=(2,-5,3)\,.\,(3,0,-2)=2\times 3-5\times 0+3\times(-2)=6-0-6=0$$

Como $\vec{u}\,.\,\vec{v}=0$, ou seja, os vetores são perpendiculares, ou seja, a reta r e o plano α são paralelos.

Considerando um ponto da reta r, por exemplo o ponto de coordenadas $(1,3,0)$ podemos averiguar se o ponto também pertence ao plano α: $3(1)-2(0)-3=0 \Leftrightarrow 3-0-3=0 \Leftrightarrow 0=0$ Assim, como a reta r é paralela ao plano α e um ponto da reta também pertence ao plano, podemos concluir que r está contida em α

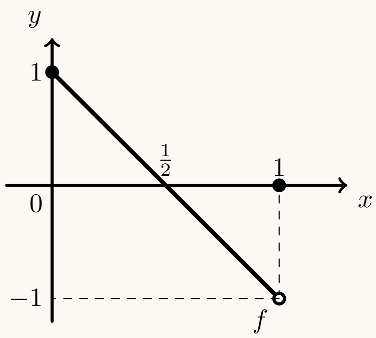


Resposta: **Opção D**

10.2. Considerando, por exemplo a função g definida pelo gráfico reproduzido na figura ao lado, e compatível com as condições do enunciado, podemos verificar que:

- a função tem um zero $\left(f\left(\frac{1}{2}\right)=0\right)$
- a função é limitada $\left(|f(x)|\leq 1, \forall x\in[0,1]\right)$
- a função tem um máximo $\left(f(x)\leq f(0), \forall x\in[0,1]\right)$

Assim, de entre as afirmações apresentadas, a única que não pode ser rejeitada com o exemplo da função f, é a de que a função g não é contínua.



Resposta: **Opção D**

11. Como $-16 = 16e^{i(\pi)}$, resolvendo a equação $z^4 + 16 = 0$, temos que:

$$z^4 + 16 = 0 \Leftrightarrow z^4 = -16 \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{-16} \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{16}e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)}, k \in \{0,1,2,3\}$$

Ou seja, temos 4 números complexos z tais que $z^4 + 16 = 0$:

- $k = 0 \rightarrow z_1 = \sqrt[4]{16}e^{i\left(\frac{\pi+0}{4}\right)} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$
- $k = 1 \rightarrow z_2 = \sqrt[4]{16}e^{i\left(\frac{\pi+2\pi}{4}\right)} = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$
- $k = 2 \rightarrow z_3 = \sqrt[4]{16}e^{i\left(\frac{\pi+4\pi}{4}\right)} = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)} = 2e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$
- $k = 3 \rightarrow z_4 = \sqrt[4]{16}e^{i\left(\frac{\pi+6\pi}{4}\right)} = 2e^{i\left(\frac{7\pi}{4}\right)} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

Como $\operatorname{Re}(z) < 0 \Leftrightarrow \left(-\pi < \operatorname{Arg}(z) < -\frac{\pi}{2} \vee \frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg}(z) < \pi\right)$, os elementos do conjunto A são os números z_2 e z_3, ou seja:

- $z_2 = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$
- $z_3 = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right) = 2\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

12.

12.1. Da análise da tabela de distribuição de probabilidades da variável X podemos verificar que:

$$P(X = 1) = \frac{8}{27}$$

Como o produto dos números saídos nos três lançamentos do dado é 1, o que ocorre apenas se sair face numerada com o número 1 em todos os lançamentos, designado por n o número de faces numeradas com o número 1 no dado, temos que:

$$P(X = 1) = \frac{n}{6} \times \frac{n}{6} \times \frac{n}{6} = \frac{n^3}{6^3} = \frac{n^3}{216}$$

Desta forma podemos calcular o valor de n, resolvendo a equação:

$$\frac{n^3}{216} = \frac{8}{27} \Leftrightarrow n^3 = \frac{8 \times 216}{27} \Leftrightarrow n = \sqrt[3]{\frac{2^3 \times 6^3}{3^3}} \Leftrightarrow n = \frac{2 \times 6}{3} \Leftrightarrow n = \frac{2 \times 2 \times 3}{3} \Leftrightarrow n = 4$$

Resposta: **Opção C**

12.2. Calculando o valor do limite, vem que:

$$\lim\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n} = \lim\left(\frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^{2n} = \left(\lim\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n}\right)^2 = \left(\frac{\lim\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}{\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right)^2 = \left(\frac{e^2}{e^1}\right)^2 =$$

$$= \left(e^{2-1}\right)^2 = \left(e^1\right)^2 = e^2$$

Resposta: **Opção C**

13. Para estudar o sentido das concavidades do gráfico e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da primeira e depois da segunda derivadas:

- $f'(x) = \left(x^3 + 6\ln x\right)' = \left(x^3\right)' + \left(6\ln x\right)' = 3x^2 + 6\left(\ln x\right)' = 3x^2 + 6 \times \frac{1}{x} = 3x^2 + \frac{6}{x}$
- $f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(3x^2 + \frac{6}{x}\right)' = \left(3x^2\right)' + \left(\frac{6}{x}\right)' = 2 \times 3x + \frac{(6)' \times x - 6 \times (x)'}{x^2} =$

$$= 6x + \frac{0 \times x - 6 \times 1}{x^2} = 6x - \frac{6}{x^2}$$

Como os pontos de inflexão são zeros da segunda derivada, vamos determiná-los, no domínio da função, ou seja, para $x \in \mathbb{R}^+$:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - \frac{6}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{6x}{1}_{(x^2)} - \frac{6}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{6x^3}{x^2} - \frac{6}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{6x^3 - 6}{x^2} = 0 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} 6x^3 - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x^3 = 6 \Leftrightarrow x^3 = \frac{6}{6} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{1} \Leftrightarrow x = 1$$

Assim, estudando o sinal da segunda derivada para relacionar com o sentido das concavidades, vem:

x	0		1	$+\infty$
$6x^3 - 6$	n.d.	$-$	0	$+$
x^2	n.d.	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	n.d.	$-$	0	$+$
$f(x)$	n.d.	$\frown$	Pt. I.	$\smile$

Calculando a ordenada do ponto de inflexão, temos que:

$$f(1) = 1^3 + 6\ln(1) = 1 + 6 \times 0 = 1$$

Logo, podemos concluir que o gráfico de f:

- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]0,1]$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $[1, +\infty[$
- tem um único ponto de inflexão cujas coordenadas são $(1,1)$

14.

14.1. Para mostrar que a função h é contínua em $x=0$, temos que verificar que $h(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$:

- $h(0)=\dfrac{e^0}{0+1}=\dfrac{1}{1}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{e^x}{x+1}\right)=\dfrac{e^0}{0+1}=\dfrac{1}{1}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}(x^2)}\right)=\dfrac{\operatorname{sen}^2(0)}{\operatorname{sen}(0^2)}=\dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}(x^2)}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\operatorname{sen} x\times\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(x^2)}\times\frac{x^2}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\times\frac{\operatorname{sen} x}{x}\times\frac{x^2}{\operatorname{sen}(x^2)}\right)=$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}_{\text{Lim. Notável}}\times\underbrace{\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}_{\text{Lim. Notável}}\times\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x^2}{\operatorname{sen}(x^2)}\right)=1\times 1\times\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x^2}{\operatorname{sen}(x^2)}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x^2}{\operatorname{sen}(x^2)}\right)=$$

(fazendo $y=x^2$, temos que se $x\to 0^-$, então $y\to 0^+$)

$$=\lim_{y\to 0^-}\left(\frac{y}{\operatorname{sen} y}\right)=\lim_{y\to 0^-}\left(\frac{1}{\frac{\operatorname{sen} y}{y}}\right)=\frac{\lim\limits_{y\to 0^-} 1}{\underbrace{\lim\limits_{y\to 0^-}\left(\frac{\operatorname{sen} y}{y}\right)}_{\text{Lim. Notável}}}=\frac{1}{1}=1$$

Assim, temos que, como $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=h(0)$, a função h é contínua em $x=0$

14.2. Como a função h é contínua (é contínua no intervalo $\left[-\frac{\pi}{3},0\right[$ porque resulta do quociente e do produto de funções contínuas, é contínua em $x=0$, de acordo com o item anterior, e é contínua no intervalo $[0,+\infty[$ porque é o quociente de funções contínuas), então o gráfico de h não admite qualquer assíntota vertical.

Como o domínio da função é $\left[-\frac{\pi}{3},+\infty\right[$, só poderá existir uma assíntota oblíqua quando $x\to+\infty$. Desta forma, vamos averiguar a existência de uma assíntota de equação $y=mx+b$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{x+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}=$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}}_{\text{Lim. Notável}}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=+\infty\times\frac{1}{1+\frac{1}{+\infty}}=+\infty\times\frac{1}{1+0}=+\infty\times 1=+\infty$$

Assim, como $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x}$ não é um valor finito, não existe qualquer assíntota oblíqua do gráfico de h.

14.3. Começamos por determinar a expressão da derivada da função h, para $x \in [0, +\infty[$:

$$h'(x) = \left(\frac{e^x}{x+1}\right)' = \frac{(e^x)'(x+1) - e^x(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{e^x(x+1) - e^x(1)}{(x+1)^2} = \frac{e^x(x+1-1)}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{e^x(x)}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$$

Calculando os zeros da derivada, no intervalo $[0, +\infty[$, vem:

$$\frac{xe^x}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow xe^x = 0 \wedge \underbrace{(x+1)^2 \neq 0}_{\text{Prop. Verdadeira, } x \geq 0} \Leftrightarrow x = 0 \vee \underbrace{e^x = 0}_{\text{Impossível}} \Leftrightarrow x = 0$$

Como a derivada é contínua e não tem zeros no intervalo $[0,+\infty[$, tem sinal constante neste intervalo. Podemos verificar que é positiva, (por exemplo, $f'(1) = \frac{1 \times e^1}{(1+1)^2} = \frac{e}{2^2} = \frac{e}{4}$), e assim concluir que h é estritamente crescente em $[0, +\infty[$

Resposta: **Opção B**

15. Considerando a monotonia da função f no domínio definido $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$, temos:

x	$-\frac{\pi}{6}$		0		$\frac{\pi}{3}$
$f(x)$	min	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	min

Temos ainda que:

- $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

Como $\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ então $\frac{1}{2}$ é um mínimo absoluto, pelo que o contradomínio da função f é $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

Resposta: **Opção C**

16. Como ambas as retas passam na origem do referencial, ambas têm ordenada na origem nula, pelo que a equação reduzida da reta r é $y = mx$.

Assim, a ordenada do ponto P é:

$$y_P = ma$$

Considerando os pontos $P'(a,0)$ e $Q'(0,a)$, a reta r', perpendicular à reta r que contém o ponto O, e ainda o ponto Q'' , pertencente à reta r', tal que $\overline{OP} = \overline{OQ''}$, temos que:

- as áreas dos triângulos $[OPP']$ e $[OQ'Q'']$ são iguais $\left(A_{[OPP']} = A_{[OQ'Q'']}\right)$
- a reta r' é definida pela equação $y = -\frac{1}{m}x$ e por isso é simétrica, relativamente ao eixo Oy, à reta s (definida pela equação $y = \frac{1}{m}x$)
- as áreas dos triângulos $[OQQ']$ e $[OQ'Q'']$ também são iguais, e assim, são ambas iguais à área do triângulo $[OPP']$
- como as coordenadas do ponto P são (a,ma), temos que as coordenadas do ponto Q'' são $(-ma,a)$ e as coordenadas do ponto Q' são (ma,a)

Assim, considerando o ponto $R(a,a)$ e o quadrado $[OP'RQ']$ temos que:

$$A_{[OPQ]} = A_{[OP'RQ']} - A_{[OP'P]} - A_{[OQ'Q]} - A_{[PQR]} =$$

$$= a^2 - \frac{a \times ma}{2} - \frac{a \times ma}{2} - \frac{(a-ma) \times (a-ma)}{2} =$$

$$= a^2 - 2 \times \frac{ma^2}{2} - \frac{(a-ma)^2}{2} =$$

$$= a^2 - ma^2 - \frac{a^2 - 2ma^2 + m^2a^2}{2} =$$

$$= a^2 - ma^2 - \frac{a^2}{2} + \frac{2ma^2}{2} - \frac{{}^2a^2}{2} =$$

$$= a^2 - ma^2 - \frac{a^2}{2} + ma^2 - \frac{m^2a^2}{2} =$$

$$= \frac{a^2}{2} - \frac{m^2a^2}{2} =$$

$$= \frac{a^2}{2}(1 - m^2)$$