REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | Época Especial | Ensino Secundário | 2017

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

VERSÃO 2

Indique de forma legível a versão da prova.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ $(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

1. Com os algarismos 0, 1, 2, 3 e 4, quantos números naturais maiores do que $20\,000$ e com os cinco algarismos todos diferentes é possível formar?

(A) 96 **(B)** 72 **(C)** 48 **(D)** 24

2. Seja X uma variável aleatória com distribuição normal de valor médio 10

Sabe-se que $P(10 < X < 15) = 0{,}4$

Qual é o valor de $P(X < 5 \vee X > 15)$?

(A) $0{,}2$ **(B)** $0{,}4$ **(C)** $0{,}6$ **(D)** $0{,}1$

3. Seja a um número real superior a 1

Qual é o valor de $4 + \log_a\left(5^{\ln a}\right)$?

(A) $\ln(20e)$ **(B)** $\ln(10e)$ **(C)** $\ln\left(5e^2\right)$ **(D)** $\ln\left(5e^4\right)$

4. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função f, polinomial do terceiro grau.

Tal como a figura sugere, a função f tem um máximo relativo para $x = -2$ e tem um mínimo relativo para $x = 2$

A origem do referencial é ponto de inflexão do gráfico de f

Sejam f' e f'' a primeira e a segunda derivadas da função f, respetivamente.

Qual é o conjunto solução da condição $f'(x) \times f''(x) \geq 0$?

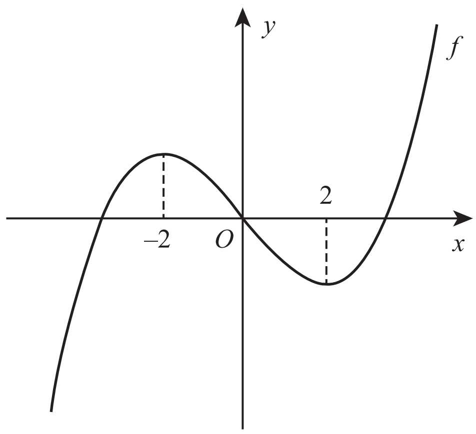

Figura 1

(A) $]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$ **(B)** $]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$

(C) $[-2, 0] \cup [2, +\infty[$ **(D)** $]-\infty, -2] \cup [0, 2]$

5. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}$, tais que a função $f-g$ admite inversa.

Sabe-se que $f(3)=4$ e que $(f-g)^{-1}(2)=3$

Qual é o valor de $g(3)$?

(A) 4 **(B)** 3 **(C)** 2 **(D)** 1

6. Considere, num referencial o.n. xOy, dois pontos distintos, R e S

Seja A o conjunto dos pontos P desse plano que verificam a condição $\overrightarrow{PR}.\overrightarrow{PS}=0$

($\overrightarrow{PR}.\overrightarrow{PS}$ designa o produto escalar de $\overrightarrow{PR}$ por $\overrightarrow{PS}$).

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) O conjunto A é a circunferência de diâmetro $[RS]$

(B) O conjunto A é o segmento de reta $[RS]$

(C) O conjunto A é a mediatriz do segmento de reta $[RS]$

(D) O conjunto A é o triângulo $[ROS]$

7. Na Figura 2, estão representados, no plano complexo, uma circunferência de centro na origem e dois diâmetros perpendiculares dessa circunferência, $[AC]$ e $[BD]$

Sabe-se que o ponto A é a imagem geométrica de um certo complexo z

Qual é a imagem geométrica do complexo $i^3 z$?

(A) Ponto A **(B)** Ponto B

(C) Ponto C **(D)** Ponto D

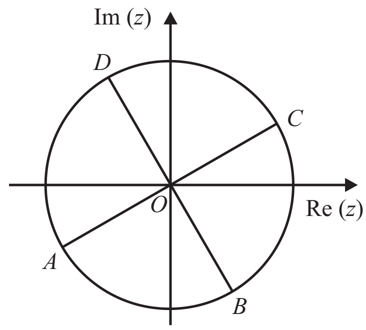

Figura 2

8. Seja (u_n) uma sucessão real em que todos os termos são positivos.

Sabe-se que, para todo o número natural n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A sucessão (u_n) é crescente.

(B) A sucessão (u_n) é um infinitamente grande.

(C) A sucessão (u_n) é limitada.

(D) A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética.

GRUPO II

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere:

- $z_1 = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}\,\text{cis}\theta}$, com $\theta \in \left]\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi}{4}\right[$
- $w = \overline{z}_1 \times z_1^{\,4}$

Seja $A = \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0 \ \wedge \ \operatorname{Im}(z) > 0 \ \wedge \ |z| = 1 \right\}$

Justifique que o número complexo w pertence ao conjunto A

2. Considere duas caixas, C_1 e C_2. A caixa C_1 tem 12 bolas, das quais cinco são brancas e as restantes são pretas. A caixa C_2 tem sete bolas, umas brancas e outras pretas.

2.1. Considere a experiência que consiste em retirar, simultaneamente e ao acaso, duas bolas da caixa C_1, colocá-las na caixa C_2 e, em seguida, retirar, também ao acaso, uma bola da caixa C_2

Sejam A e B os acontecimentos:

A : «*As bolas retiradas da caixa* C_1 *têm a mesma cor.*»

B : «*A bola retirada da caixa* C_2 *é branca.*»

Sabe-se que $P\left(B \mid \overline{A}\right) = \dfrac{2}{3}$

Interprete o significado de $P\left(B \mid \overline{A}\right)$ e indique, justificando, quantas bolas brancas e quantas bolas pretas existiam inicialmente na caixa C_2

2.2. Considere agora a caixa C_1 com a sua constituição inicial (12 bolas, das quais cinco são brancas e sete são pretas).

Retira-se, ao acaso, uma bola dessa caixa, regista-se a sua cor e coloca-se novamente a bola na caixa. Repete-se esta experiência seis vezes.

Determine a probabilidade de, nessas seis vezes, sair bola branca, pelo menos, duas vezes.

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

3. Pretende-se eliminar um poluente diluído na água de um tanque de um viveiro. Para tal, é escoada água por um orifício na base do tanque e, em simultâneo, é vertida no tanque água não poluída, de tal modo que a quantidade total de água no tanque se mantém.

Admita que a massa, p, de poluente, medida em gramas, t horas após o início do processo, é, para um certo número real positivo k, dada por

$$p(t) = 120\, e^{-kt} \quad (t \geq 0)$$

Resolva os itens **3.1.** e **3.2.** recorrendo exclusivamente a métodos analíticos.
Na resolução do item **3.2.**, pode utilizar a calculadora para efetuar eventuais cálculos numéricos.

3.1. Determine o valor de k, sabendo que, duas horas após o início do processo, a massa de poluente é metade da existente ao fim de uma hora.

Apresente o resultado na forma $\ln a$, com $a > 1$

3.2. Admita agora que $k = 0{,}7$

Determine a taxa média de variação da função p no intervalo $[0, 3]$ e interprete o resultado obtido no contexto da situação descrita.

Apresente o valor da taxa média de variação arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

4. Seja f a função, de domínio $]1-\pi, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-2}{\operatorname{sen}(x-1)} & \text{se} \quad 1-\pi < x < 1 \\ 2 & \text{se} \quad x = 1 \\ e^{-2x+4} + \ln(x-1) & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Resolva os itens **4.1.** e **4.2.** recorrendo exclusivamente a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

4.1. Indique, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira ou é falsa.

«A função f é contínua à esquerda no ponto 1, mas não é contínua à direita nesse ponto.»

4.2. Escreva a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $1 - \dfrac{\pi}{2}$

4.3. O gráfico da função f tem um único ponto de inflexão, cuja abcissa pertence ao intervalo $]1, 2[$

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa desse ponto.

Na sua resposta:

- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver o problema;
- apresente a abcissa do ponto de inflexão arredondada às centésimas.

5. Na Figura 3, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cilindro de revolução de altura 3

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(1, 2, 0)$ e é o centro da base inferior do cilindro, a qual está contida no plano xOy
- o ponto B tem coordenadas $(1, 3, 0)$ e pertence à circunferência que delimita a base inferior do cilindro;
- o ponto C é o centro da base superior do cilindro.

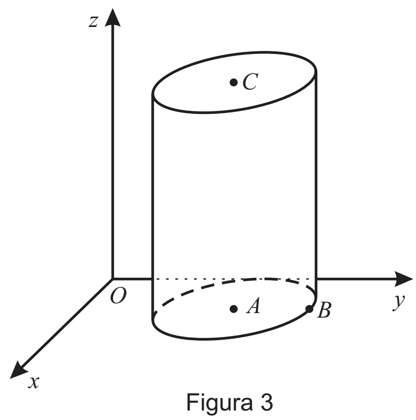

Figura 3

5.1. Determine a área da secção produzida no cilindro pelo plano de equação $x = 1$

5.2. Determine as coordenadas do ponto de intersecção da reta BC com o plano xOz

5.3. Seja α o plano que passa no ponto A e que é perpendicular à reta r definida pela condição $x = y = 1 - z$. Seja P o ponto desse plano de abcissa e ordenada iguais a 2

Determine a amplitude do ângulo POC

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

6. Na Figura 4, está representada, num referencial o.n. xOy, a circunferência de centro na origem e raio 1

Sabe-se que:

- o ponto A está no segundo quadrante e pertence à circunferência;
- o ponto D tem coordenadas $(1, 0)$
- o ponto C pertence ao primeiro quadrante e tem abcissa igual à do ponto D
- o ponto B pertence ao eixo Oy e é tal que o segmento de reta $[AB]$ é paralelo ao eixo Ox
- os ângulos AOC e COD são geometricamente iguais e cada um deles tem amplitude α $\left(\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

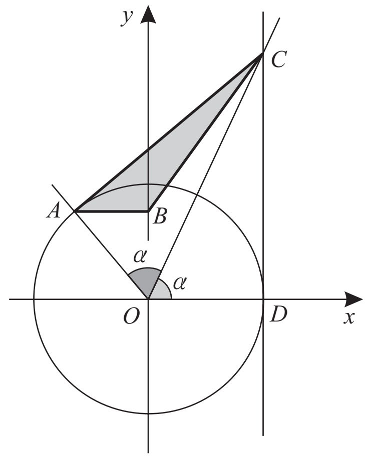

Figura 4

Mostre que a área do triângulo $[ABC]$, representado a sombreado, é dada por $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha \cos^2(2\alpha)}{2}$

FIM

COTAÇÕES

Grupo	Item Cotação (em pontos)												
I	**1.** a **8.** 8 × 5 pontos												40
II	**1.** 15	**2.1.** 15	**2.2.** 15	**3.1.** 15	**3.2.** 15	**4.1.** 15	**4.2.** 15	**4.3.** 15	**5.1.** 5	**5.2.** 10	**5.3.** 15	**6.** 10	160
TOTAL													**200**