REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2017

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 10 Páginas

VERSÃO 2

Indique de forma legível a versão da prova.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ($k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Página em branco

GRUPO I

1. Considere todos os números naturais de cinco algarismos diferentes que se podem formar com os algarismos $1, 2, 3, 4$ e 5

Destes números, quantos têm os algarismos pares um a seguir ao outro?

(A) 72 **(B)** 96 **(C)** 24 **(D)** 48

2. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é a seguinte.

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(X > 1 \mid X \leq 3)$?

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{5}{9}$ **(C)** $\frac{8}{9}$ **(D)** $\frac{3}{4}$

3. De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, com derivada finita em todos os pontos do seu domínio, sabe-se que $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 2x}{f(x) - f(2)} = 4$

Qual é o valor de $f'(2)$?

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $-\frac{1}{4}$ **(D)** $-\frac{1}{2}$

4. Na Figura 1, está representado o gráfico de uma função f, de domínio $[-1, 6]$, e, na Figura 2, está representada parte do gráfico de uma função g, de domínio $\mathbb{R}$

Tal como as figuras sugerem, em ambas as funções, todos os objetos inteiros têm imagens inteiras.

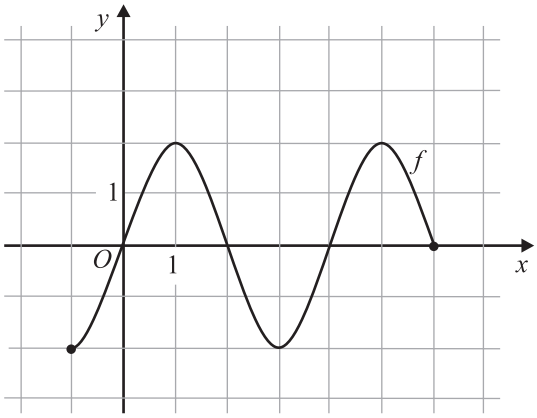

Figura 1

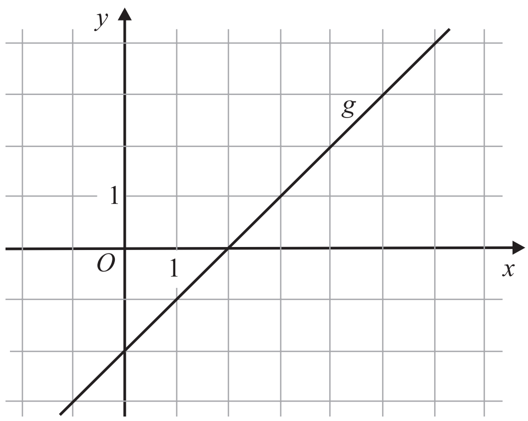

Figura 2

Quais são os zeros da função $g \circ f$?

(o símbolo $\circ$ designa a composição de funções)

(A) 2 e 6 **(B)** -1 e 3 **(C)** 1 e 5 **(D)** 0 e 4

5. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$

A tabela de variação de sinal da função f'', segunda derivada de f, é a seguinte.

x	$-\infty$	-10		0		10	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Seja g a função definida por $g(x) = -f(x-5)$

Em qual dos intervalos seguintes o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo?

(A) $]0, 10[$ **(B)** $]-5, 5[$ **(C)** $]5, 15[$ **(D)** $]-15, -5[$

6. Seja z um número complexo de argumento $\frac{\pi}{5}$

Qual dos seguintes valores é um argumento do número complexo $-5iz$?

(A) $-\frac{4\pi}{5}$ **(B)** $-\frac{3\pi}{10}$ **(C)** $-\frac{13\pi}{10}$ **(D)** $-\frac{7\pi}{5}$

7. Considere, num referencial o.n. xOy, a região definida pela condição

$$(x+1)^2+(y+1)^2 \leq 1 \quad \wedge \quad x+y+2 \geq 0$$

Qual é o perímetro dessa região?

(A) $\pi+2$ **(B)** $\frac{\pi}{2}+2$ **(C)** $\frac{\pi}{2}+1$ **(D)** $\pi+1$

8. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{1-n}$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$

(B) A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética de razão 2

(C) A sucessão (u_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$

(D) A sucessão (u_n) é uma progressão geométrica de razão 2

GRUPO II

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam z_1 e z_2 tais que $z_1 = 2 + i$ e $z_1 \times \overline{z_2} = 4 - 3i$

Considere a condição $|z - z_1| = |z - z_2|$

Mostre que o número complexo $\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$ verifica esta condição e interprete geometricamente este facto.

Resolva este item sem recorrer à calculadora.

2. Na Figura 3, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$

Sabe-se que:

- a face $[ABCD]$ está contida no plano xOy
- a aresta $[CD]$ está contida no eixo Oy
- o ponto D tem coordenadas $(0, 4, 0)$
- o plano ACG é definido pela equação $x + y - z - 6 = 0$

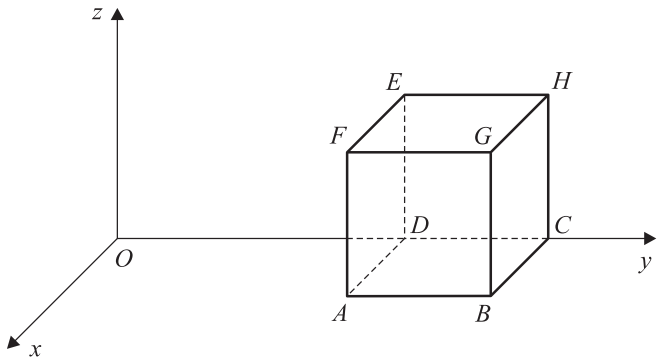

Figura 3

2.1. Verifique que o vértice A tem abcissa igual a 2

2.2. Seja r a reta definida pela condição $x - 1 = 1 - y = z$

Determine as coordenadas do ponto de intersecção da reta r com o plano ACG

2.3. Seja P o vértice de uma pirâmide regular de base $[EFGH]$

Sabe-se que:

- a cota do ponto P é superior a 2
- o volume da pirâmide é 4

Determine a amplitude do ângulo OGP

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

3. Uma escola secundária tem alunos de ambos os sexos.

3.1. Escolhe-se, ao acaso, um aluno dessa escola.

Seja A o acontecimento «o aluno escolhido é rapariga», e seja B o acontecimento «o aluno escolhido frequenta o 10.º ano».

Sabe-se que:

- a probabilidade de o aluno escolhido ser rapaz ou não frequentar o 10.º ano é $0{,}82$
- a probabilidade de o aluno escolhido frequentar o 10.º ano, sabendo que é rapariga, é $\frac{1}{3}$

Determine $P(A)$

3.2. Uma das turmas dessa escola tem trinta alunos, numerados de 1 a 30

Com o objetivo de escolher quatro alunos dessa turma para formar uma comissão, introduzem-se, num saco, trinta cartões, indistinguíveis ao tato, numerados de 1 a 30. Em seguida, retiram-se quatro cartões do saco, simultaneamente e ao acaso.

Qual é a probabilidade de os dois menores números saídos serem o 7 e o 22 ?

Apresente o resultado arredondado às milésimas.

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

Resolva os itens **4.1.**, **4.2.** e **4.3.** recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

4.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico paralelas aos eixos coordenados.

4.2. Resolva a inequação $f(x) > 2 \ln x$

Apresente o conjunto solução usando a notação de intervalos de números reais.

4.3. Para um certo número real k, a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \frac{k}{x} + f(x)$, tem um extremo relativo para $x = 1$

Determine esse número k

5. Considere o desenvolvimento de $\left(2x\operatorname{sen}\alpha + \frac{\cos\alpha}{x}\right)^2$, em que $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \neq 0$

Determine os valores de α, pertencentes ao intervalo $]\pi, 2\pi[$, para os quais o termo independente de x, neste desenvolvimento, é igual a 1

Resolva este item recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

6. Num jardim, uma criança está a andar num baloiço cuja cadeira está suspensa por duas hastes rígidas. Atrás do baloiço, há um muro que limita esse jardim.

A Figura 4 esquematiza a situação. O ponto P representa a posição da cadeira.

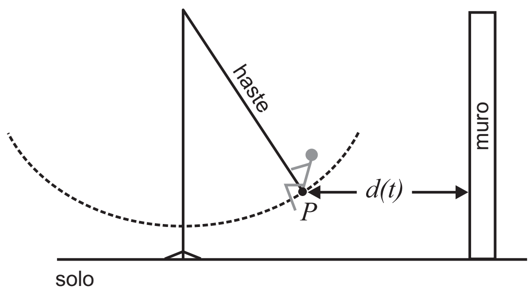

Figura 4

Num determinado instante, em que a criança está a dar balanço, é iniciada a contagem do tempo. Doze segundos após esse instante, a criança deixa de dar balanço e procura parar o baloiço arrastando os pés no chão.

Admita que a distância, em decímetros, do ponto P ao muro, t segundos após o instante inicial, é dada por

$$d(t) = \begin{cases} 30 + t\,\text{sen}(\pi t) & \text{se } 0 \leq t < 12 \\ 30 + 12\,e^{12-t}\,\text{sen}(\pi t) & \text{se } t \geq 12 \end{cases}$$

(o argumento da função seno está expresso em radianos)

6.1. Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o número de soluções da equação $d(t) = 27$ no intervalo $[0, 6]$, e interprete o resultado no contexto da situação descrita.

Na sua resposta, reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver o problema.

6.2. Admita que, no instante em que é iniciada a contagem do tempo, as hastes do baloiço estão na vertical e que a distância do ponto P ao chão, nesse instante, é 4 dm

Treze segundos e meio após o instante inicial, a distância do ponto P ao chão é $4{,}2\text{ dm}$

Qual é o comprimento da haste?

Apresente o resultado em decímetros, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

Grupo	Item / Cotação (em pontos)												
I	**1.** a **8.**												
	8 × 5 pontos												**40**
II	**1.**	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**	**5.**	**6.1.**	**6.2.**	
	15	5	10	15	15	15	15	15	15	15	15	10	**160**
TOTAL													**200**

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 635

2.ª Fase

VERSÃO 2