

Exame final nacional de Matemática A (2017, 2.ª fase)

Proposta de resolução



GRUPO I

1. Temos que os algarismos pares, ficando juntos podem ocupar 4 grupos de duas posições adjacentes e trocando entre si, podem figurar no número de 2×4 formas distintas.
Os algarismos ímpares devem ocupar as 3 posições restantes, podendo trocar entre si, o que corresponde a ${}^3A_3 = P_3 = 3!$ disposições diferentes.
Assim, considerando todas as disposições diferentes dos algarismos, temos que o total de números naturais nas condições do enunciado é: $2 \times 4 \times 3! = 8 \times 6 = 48$

Resposta: **Opção B**

2. Temos que:

$$P(X > 1 | X \leq 3) = \frac{P(X > 1 \cap X \leq 3)}{P(X \leq 3)} = \frac{P(2 \leq X \leq 3)}{1 - P(X > 3)} = \frac{P(X = 2) + P(X = 3)}{1 - P(X = 4)} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{5}{9}$$

Resposta: **Opção D**

3. Temos que, pela definição de derivada num ponto, $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

Assim, vem que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{f(x) - f(2)} = 4 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 2x}} = 4 \Leftrightarrow \frac{\lim_{x \rightarrow 2} 1}{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 2x}} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x(x - 2)}} = 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x} \times \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \right)} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{2} \times f'(2)} = 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 = 4 \times \frac{1}{2} \times f'(2) \Leftrightarrow 1 = \frac{4}{2} \times f'(2) \Leftrightarrow 1 = 2f'(2) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = f'(2) \end{aligned}$$

Resposta: **Opção C**

4. Temos que $(g \circ f)(x) = 0 \Leftrightarrow g(f(x)) = 0$





Como o único zero da função g é 2, ou seja, $g(a) = 0 \Leftrightarrow a = 2$, então vem que:

$$g(f(x)) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2$$





E, por observação do gráfico de f podemos verificar que, os objetos cuja imagem é 2, pela função f , são 1 e 5

Resposta: **Opção B**

5. Relacionando o sinal da segunda derivada de f com o sentido das concavidades do gráfico, temos:

x	$-\infty$	-10		0		10	$+\infty$
f''	-	0	+	0	-	0	+
f		Pt. I.		Pt. I.		Pt. I.	

Como o gráfico de $f(x-5)$ é uma translação horizontal do gráfico de f associada ao vetor de coordenadas $(5,0)$, e o gráfico de $-f(x-5)$ é simétrico relativamente ao eixo das abcissas do gráfico de $f(x-5)$, podemos relacionar o sinal de $f''(x-5)$ com o sinal da segunda derivada de $-f''(x-5)$:

x	$-\infty$	-5		5		15	$+\infty$
$f''(x-5)$	-	0	+	0	-	0	+
$-f''(x-5)$	+	0	-	0	+	0	-
g		Pt. I.		Pt. I.		Pt. I.	

Logo, podemos concluir que o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]-5,5[$ e também no intervalo $]15, +\infty[$

Resposta: **Opção C**

6. Temos que:

- os argumentos dos complexos z e $5z$ são iguais

$$\text{Arg}(5z) = \text{Arg}(z) = \frac{\pi}{5}$$

- os argumentos de complexos simétricos, $-5z$ e $5z$, diferem de π

$$\text{Arg}(-5z) = \text{Arg}(5z) - \pi = \frac{\pi}{5} - \pi = -\frac{4\pi}{5}$$

- a multiplicação por i de um complexo corresponde a somar $\frac{\pi}{2}$ ao seu argumento

$$\text{Arg}(-5iz) = \text{Arg}(-5z) + \frac{\pi}{2} = -\frac{4\pi}{5} + \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{10} + \frac{5\pi}{10} = -\frac{3\pi}{10}$$

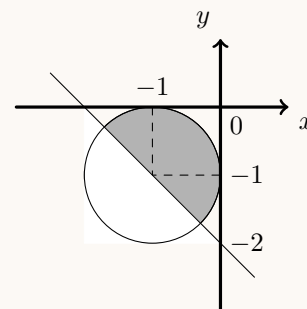
Resposta: **Opção A**



7. Observando que $(x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow (x-(-1))^2 + (y-(-1))^2 \leq 1^2$, temos que esta condição representa o círculo de centro no ponto $(-1, -1)$ e raio 1

Observando que $x+y+2 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -x-2$, temos que esta condição representa o semiplano superior limitado pela reta de declive -1 e ordenada na origem -2

Representando a sombreado a interseção dos dois conjuntos de pontos, como na figura ao lado, podemos observar que corresponde a um semi-círculo de raio 1



Assim, o perímetro da região definida pela condição é a soma do semi-perímetro do círculo com o diâmetro do círculo ($2r$):

$$P = \frac{2\pi r}{2} + 2r = \frac{2\pi \times 1}{2} + 2 \times 1 = \pi + 2$$

Resposta: **Opção C**

8. Temos que:

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} = \frac{1}{2} \times 2^n = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1} = 1 \times 2^{n-1}$$

Assim, como $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n-1+1}}{2^{n-1}} = \frac{2^n}{2^n \times 2^{-1}} = \frac{2^n}{2^n} \times \frac{1}{2^{-1}} = 1 \times 2 = 2$, (u_n) é uma progressão geométrica de razão 2

Resposta: **Opção B**

GRUPO II

1. Como $z_1 \times \bar{z}_2 = 4 - 3i \Leftrightarrow \bar{z}_2 = \frac{4 - 3i}{z_1}$, calculando o valor de \bar{z}_2 , temos:

$$\bar{z}_2 = \frac{4 - 3i}{2 + i} = \frac{(4 - 3i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{8 - 4i - 6i + 3i^2}{2^2 - i^2} = \frac{8 - 10i - 3}{4 - (-1)} = \frac{5 - 10i}{5} = 1 - 2i$$

E assim, temos que: $\bar{z}_2 = 1 - 2i \Leftrightarrow z_2 = 1 + 2i$

Escrevendo $\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$ na forma algébrica, temos:

$$\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = \frac{2}{2} + \frac{2}{2} i = 1 + i$$

Assim, o número complexo anterior verifica a condição $|z - z_1| = |z - z_2|$, porque:

- $|(1 + i) - (2 + i)| = |1 + i - 2 - i| = |1 - 2 + 0i| = |-1| = 1$
- $|(1 + i) - (1 + 2i)| = |1 + i - 1 - 2i| = |1 - 1 - i| = |-i| = 1$

Como o número complexo $\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$ verifica a condição $|z - z_1| = |z - z_2|$, então a representação geométrica deste número complexo está a igual distância das representações geométricas dos complexos z_1 e z_2



2.

2.1. Sabemos que:

- ponto A pertence ao plano xOy , pelo que tem cota nula ($z_A = 0$)
- a aresta $[DA]$ pertence ao plano xOy e é perpendicular ao eixo Oy , pelo que a ordenada do ponto A é igual à ordenada do ponto D ($y_A = y_D = 4$)

Assim, substituindo os valores da ordenada e da cota do ponto A na equação do plano ACG , podemos calcular o valor da abcissa (x_A):

$$x_A + y_A - z_A - 6 = 0 \Leftrightarrow x_A + 4 + 0 - 6 = 0 \Leftrightarrow x_A - 2 = 0 \Leftrightarrow x_A = 2$$

2.2. As coordenadas do ponto de intersecção da reta r com o plano ACG , verificam simultaneamente a equação do plano e as equações da reta, ou seja, podem ser calculadas resolvendo o sistema seguinte:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y - z - 6 = 0 \\ x - 1 = 1 - y \\ x - 1 = z \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z - 6 = 0 \\ y = -x + 2 \\ x - 1 = z \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x - x + 2 - (x - 1) - 6 = 0 \\ y = -x + 2 \\ x - 1 = z \end{cases} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x + 1 - 6 = 0 \\ y = -x + 2 \\ x - 1 = z \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 1 - 6 = x \\ y = -x + 2 \\ x - 1 = z \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -3 = x \\ y = -(-3) + 2 \\ -3 - 1 = z \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -3 = x \\ y = 5 \\ -4 = z \end{cases} \end{aligned}$$

Logo a reta r e o plano ACG intersectam-se no ponto de coordenadas $(-3, 5, -4)$

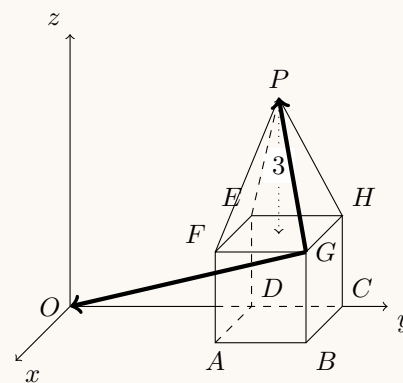


2.3. Como a base do cubo é um quadrado de lado 2 ($\overline{AD} = 2$), temos que a área da base é:

$$A_{[EFGH]} = \overline{AD}^2 = 2^2 = 4$$

Como o volume da pirâmide é 4, então calculando a altura h da pirâmide, temos:

$$\begin{aligned} V_{[ABCDEFGHP]} &= \frac{1}{3} \times A_{[EFGH]} \times h \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4 &= \frac{1}{3} \times 4 \times h \Leftrightarrow \frac{4 \times 3}{4} = h \Leftrightarrow h = 3 \end{aligned}$$



Como a cota do ponto P é superior a 2 e a aresta do cubo é 2, então a cota do ponto P é

$$z_P = 2 + h = 2 + 3 = 5$$

Como a projeção do ponto P no plano xOy é o centro do quadrado $[ABCD]$, temos que a abcissa é $x_P = 1$ e a ordenada é $y_P = 5$, pelo que as coordenadas do ponto P são $(1,5,5)$

Como as coordenadas do ponto G são $(2,6,2)$, podemos calcular as coordenadas do vetor \overrightarrow{GP} , e a sua norma:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GP} &= P - G = (1,5,5) - (2,6,2) = (-1, -1, 3) \\ \|\overrightarrow{GP}\| &= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 1 + 9} = \sqrt{11} \end{aligned}$$

Como O é a origem do referencial, podemos calcular as coordenadas do vetor \overrightarrow{GO} , e a sua norma:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GO} &= O - G = (0,0,0) - (2,6,2) = (-2, -6, -2) \\ \|\overrightarrow{GO}\| &= \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 36 + 4} = \sqrt{44} \end{aligned}$$

Recorrendo à fórmula do produto escalar vem:

$$\cos(\widehat{GPO}) = \frac{\overrightarrow{GP} \cdot \overrightarrow{GO}}{\|\overrightarrow{GP}\| \times \|\overrightarrow{GO}\|} = \frac{(-1, -1, 3) \cdot (-2, -6, -2)}{\sqrt{11} \times \sqrt{44}} = \frac{2 + 6 - 6}{\sqrt{11} \times \sqrt{44}} = \frac{2}{\sqrt{484}}$$

Logo, a amplitude do ângulo OGP , em graus, arredondado às unidades, é

$$\widehat{OGP} = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{484}}\right) \approx 85^\circ$$

3.

3.1. De acordo com os acontecimentos A e B definidos, e os dados do enunciado, temos que:

- $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,82$
- $P(B|A) = \frac{1}{3}$

Assim, usando as Leis de De Morgan, e o teorema do acontecimento contrário, temos que:

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,82 &\Leftrightarrow P(\overline{A \cap B}) = 0,82 \Leftrightarrow 1 - P(A \cap B) = 0,82 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P(A \cap B) = 1 - 0,82 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,18 \end{aligned}$$

Usando a definição de probabilidade condicional, podemos calcular $P(A)$:

$$P(B|A) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{0,18}{P(A)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 0,18 \times 3 = P(A) \Leftrightarrow P(A) = 0,54$$



3.2. Como são extraídos 4 cartões simultaneamente de um conjunto de 30, o número extrações diferentes que podem ser feitas, ou seja o número de casos possíveis, é ${}^{30}C_4$

Para que num extração os menores números saídos sejam o 7 e o 22, então estes dois números devem estar no conjunto dos 4 cartões extraídos e os restantes dois números devem ser escolhidos de entre os $30 - 22 = 8$ cartões com números superiores a 22, ou seja, existem ${}^1C_1 \times {}^1C_1 \times {}^8C_2 = {}^8C_2$ conjuntos de cartões nestas condições, ou seja o número de casos favoráveis é 8C_2

Assim, recorrendo à Regra de Laplace, calculando a probabilidade de selecionar 4 dos 30 cartões e os menores números saídos serem o 7 e o 22 e arredondando o resultado às milésimas, temos:

$$p = \frac{{}^8C_2}{{}^{30}C_4} \approx 0,001$$

4.

4.1. Como a função é contínua em \mathbb{R}^+ , a reta de equação $x = 0$ é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de f . Para averiguar esta hipótese vamos calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 0^+}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

Assim, como $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, podemos concluir a reta de equação $x = 0$ é a única assíntota vertical do gráfico de f , ou seja, paralela ao eixo das ordenadas.

Como o domínio da função é \mathbb{R}^+ , para averiguar a existência de assíntotas paralelas ao eixo das abcissas, vamos calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = 0$$

Logo, podemos concluir que a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de f , quando $x \rightarrow +\infty$, e que é a única assíntota do gráfico de f paralela ao eixo das abcissas.

4.2. Resolvendo a inequação, temos que:

$$f(x) > 2 \ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} > 2 \ln x \Leftrightarrow \ln x > x \times 2 \ln x \Leftrightarrow \ln x - x \times 2 \ln x > 0 \Leftrightarrow (\ln x)(1 - 2x) > 0$$

Como o domínio da função é \mathbb{R}^+ estudamos o sinal do produto, em $]0, +\infty[$, através de um quadro de variação de sinal, para resolver a inequação:

x	0		$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$\ln x$	n.d.	-	-	-	0	+
$1 - 2x$	n.d.	+	0	-	-	-
$(\ln x)(1 - 2x)$	n.d.	-	0	+	0	-

Assim, temos que o conjunto solução da inequação é $\left] \frac{1}{2}, 1 \right[$



4.3. Como os extremos relativos correspondem aos zeros da função derivada, começamos por determinar a expressão da função derivada da função g :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{k}{x} + f(x) \right)' = \left(\frac{k}{x} \right)' + \left(\frac{\ln x}{x} \right)' = \frac{k' \times x - x' \times k}{x^2} + \frac{(\ln x)'x - x'(\ln x)}{x^2} = \\ &= \frac{0 - 1 \times k}{x^2} + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} \stackrel{x \neq 0}{=} \frac{-k + 1 - \ln x}{x^2} \end{aligned}$$

Como a função tem um extremo relativo para $x = 1$, então 1 é zero da função derivada ($g'(1) = 0$), pelo que podemos determinar o valor de k resolvendo a equação seguinte:

$$g'(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{-k + 1 - \ln 1}{1^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{-k + 1 - 0}{1} = 0 \Leftrightarrow -k + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = k$$

5. Calculando o desenvolvimento do quadrado da soma, temos:

$$\begin{aligned} \left(2x \operatorname{sen} \alpha + \frac{\cos \alpha}{x} \right)^2 &= (2x \operatorname{sen} \alpha)^2 + 2(2x \operatorname{sen} \alpha) \left(\frac{\cos \alpha}{x} \right) + \left(\frac{\cos \alpha}{x} \right)^2 = \\ &= 4x^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{4x \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{x} + \frac{\cos^2 \alpha}{x^2} = 4x^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + 4 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{x^2} \end{aligned}$$

Assim, nos três termos do desenvolvimento o termo independente é $4 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$, pelo que, como sabemos que o termo independente é igual a 1, calculando os valores de α pertencentes ao intervalo $] \pi, 2\pi[$, vem:

$$\begin{aligned} 4 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 1 &\Leftrightarrow 2 \times 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 1 \Leftrightarrow 2 \times \operatorname{sen} (2\alpha) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen} (2\alpha) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen} (2\alpha) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2\alpha = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como se pretende identificar os valores de $\alpha \in] \pi, 2\pi[$, atribuindo valores inteiros a k para identificar as soluções no intervalo definido, temos:

- $k = 0 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{12} \vee \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} \left(\frac{\pi}{12} \notin] \pi, 2\pi[\text{ e } \frac{5\pi}{12} \notin] \pi, 2\pi[\right)$
- $k = 1 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{13\pi}{12} \vee \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{17\pi}{12}$
- $k = 2 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{12} + 2\pi = \frac{25\pi}{12} \vee \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} + 2\pi = \frac{29\pi}{12} \left(\frac{25\pi}{12} \notin] \pi, 2\pi[\text{ e } \frac{29\pi}{12} \notin] \pi, 2\pi[\right)$

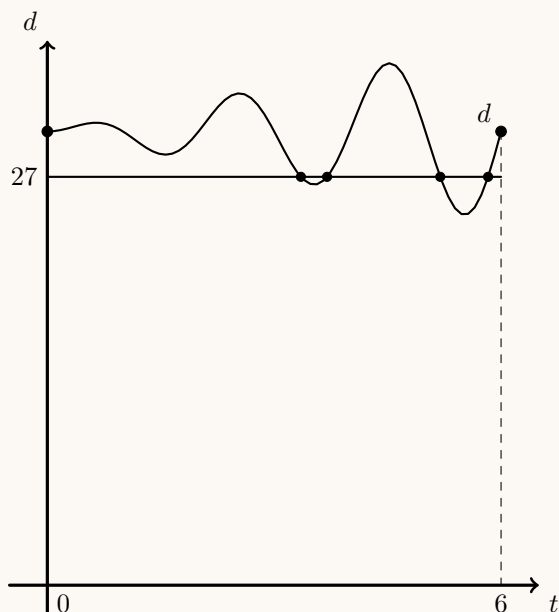
Assim, os valores de α nas condições do enunciado são $\frac{13\pi}{12}$ e $\frac{17\pi}{12}$



6.

- 6.1. Representando na calculadora gráfica o gráfico da função d , para valores de $t \in [0,6]$, ou seja, para $t \leq 12$ e a reta de equação $d = 27$, (reproduzido na figura ao lado) podemos observar que a reta intersecta o gráfico da função neste intervalo em 4 pontos, pelo que o número de soluções da equação $d = 27$, no intervalo $[0,6]$ é 4

No contexto da situação descrita, a existência de 4 soluções no intervalo $[0,6]$, significa que a criança esteve a uma distância de 27 decímetros do muro, por quatro vezes, nos primeiros seis segundos.

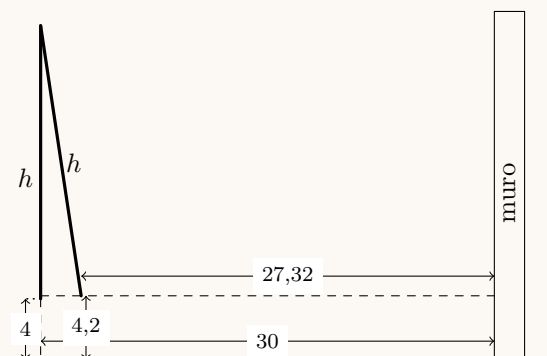


- 6.2. No instante inicial as hastes estão na vertical e a distância ao chão é de 4 dm, e, no mesmo instante a distância ao muro é dada por:

$$d(0) = 30 + 0 \times \text{sen } \pi \times 0 = 30 + 0 = 30 \text{ dm}$$

Passados treze segundos e meio a distância ao chão é de 4,2 dm e a distância ao muro é dada por:

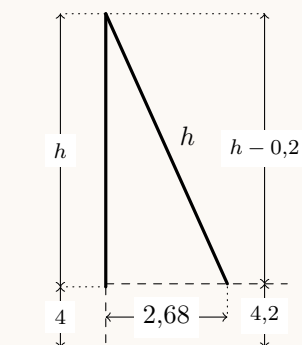
$$\begin{aligned} d(13,5) &= 30 + 12e^{12-13,5} \text{sen}(\pi \times 13,5) = \\ &= 30 + 12e^{-1,5} \text{sen}(\pi \times 13,5) \approx 27,32 \text{ dm} \end{aligned}$$



Assim, podemos considerar um triângulo retângulo, cuja hipotenusa tem o comprimento da haste (h), o cateto maior mede $h + 4 - 4,2 = h - 0,2$ e o cateto menor mede $d(0) - d(13,5) \approx 30 - 27,32 \approx 2,68$

E assim, recorrendo ao teorema de Pitágoras, um valor aproximado do comprimento da haste é dado por:

$$\begin{aligned} h^2 &= (h - 0,2)^2 + 2,68^2 \Leftrightarrow h^2 = h^2 - 0,4h + 0,2^2 + 2,68^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0,4h = 0,2^2 + 2,68^2 \Leftrightarrow h = \frac{0,2^2 + 2,68^2}{0,4} \end{aligned}$$



Como $\frac{0,2^2 + 2,68^2}{0,4} \approx 18$, o valor do comprimento da haste, arredondado às unidades, é 18 dm

