Exame final nacional de Matemática A (2017, 1.ª fase)

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Os números naturais de quatro algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9 e que são múltiplos de 5, são constituídos por 3 algarismos ou posições, em que as três primeiras podem ser ocupada por 9 algarismos (todos exceto o zero), e a última apenas por 1 (o algarismo 5).
   Assim, o número de múltiplos de 5 nas condições do enunciado é

   $$9 \times 9 \times 9 \times 1 = 9^3 \times 1 = 9^3 = 729$$

   Resposta: **Opção A**

2. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um aluno da turma, e os acontecimentos:
   V:≪O aluno ter olhos verdes≫
   R:≪O aluno é um rapaz≫
   Temos que $P(V|R) = \frac{1}{4}$ e $P(V \cap R) = \frac{1}{10}$

   Assim, temos que:

   $$P(R) = \frac{P(V \cap R)}{P(V|R)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

   Ou seja a probabilidade de escolher um aluno da turma e ele ser rapaz, ou seja, a proporção de rapazes relativamente ao total de alunos da turma é $\frac{2}{5}$. Como existem 20 alunos na turma o número de rapazes da turma é:

   $$\frac{2}{5} \times 20 = \frac{40}{5} = 8$$

   Resposta: **Opção B**

3. Por observação do gráfico de f, podemos observar o sentido das concavidades e relacionar com o sinal da segunda derivada, f'' (porque o único ponto de inflexão do gráfico de f tem abcissa zero).

x		0	
$f(x)$	$\frown$	Pt. I.	$\smile$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

Assim, temos que:

- Como $f''(1) > 0$ e $f''(2) > 0$, então $f''(-2) + f''(-1) > 0$
- Como $f''(-2) < 0$ e $f''(-1) < 0$, então $f''(-2) + f''(-1) < 0$
- Como $f''(-2) < 0$ e $f''(-1) < 0$, então $f''(-2) \times f''(-1) > 0$
- Como $f''(1) > 0$ e $f''(2) > 0$, então $f''(1) \times f''(2) > 0$

Resposta: **Opção D**

4. Como o declive da assíntota do gráfico de f é -1, e o domínio de f é $\mathbb{R}^+$, temos que:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$$

Como $y = -x$ é assíntota do gráfico de g, e o domínio de g é $\mathbb{R}^+$, temos que:

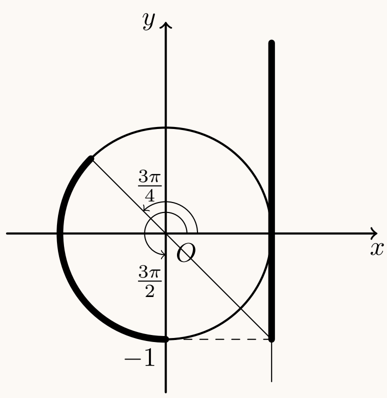
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (-x) = -\infty$$

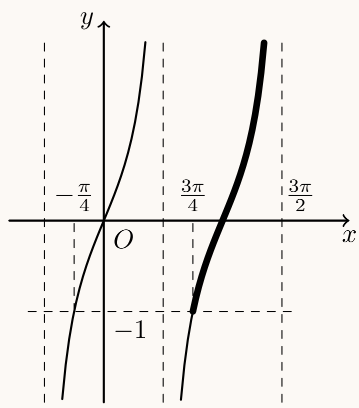
E assim, temos que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)\times g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \times g(x)\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \times \lim_{x\to+\infty} g(x) = -1 \times (-\infty) = +\infty$$

Resposta: **Opção A**

5. Identificando no círculo trigonométrico os valores da tangente do intervalo $[-1, +\infty[$, e as amplitudes dos arcos correspondentes, (como na figura seguinte, à esquerda) temos, de entre os conjuntos apresentados, o único conjunto de valores cuja tangente pertence ao intervalo é $\left]\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$





Na figura anterior, à direita podemos ver uma representação gráfica da função $\operatorname{tg}(x)$ com a restrição ao domínio $\left]\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$ assinalada, para verificar que o respetivo contradomínio é $[-1, +\infty[$

Resposta: **Opção B**

6. Como $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, temos que:

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\frac{1}{5}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2\alpha + 1 = 5 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2\alpha = 4 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \pm 2$$

Como $\cos\alpha < 0$, então a reta tem declive negativo.
Assim, como o declive da reta é a tangente da inclinação ($m = \operatorname{tg}\alpha$), temos que $\operatorname{tg}\alpha = -2$, ou seja a reta tem declive -2, pelo que, de entre as opções apresentadas a reta de equação $y = -2x$ é a única, cuja inclinação α, verifica a condição $\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

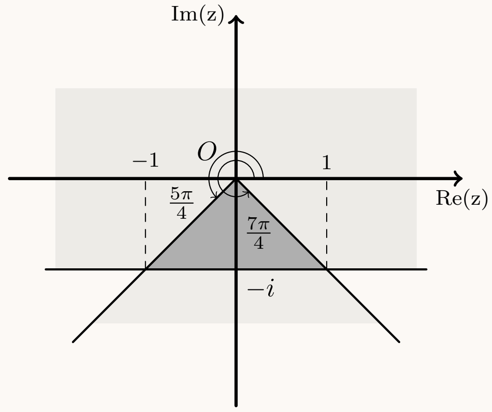
Resposta: **Opção C**

7. A região é defina pela conjunção de duas condições, cujas representações gráficas no plano complexo são:

- a região dos 3º e 4º quadrantes limitada pelas bissetrizes destes quadrantes $\left(\dfrac{5\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \dfrac{7\pi}{4}\right)$
- o semiplano acima da reta horizontal defina por $\operatorname{Im}(z) \geq -1$

Assim, a região definida pela conjunção é um triângulo, cujos vértices são a origem e os pontos de coordenadas $(-1,-1)$ e $(1,-1)$, ou seja, a medida da base é 2 e da altura é 1, pelo que, a área (A_Δ) é:

$$A_\Delta = \frac{2 \times 1}{2} = 1$$



Resposta: **Opção D**

8. Observando a expressão da sucessão, temos que:

- Para $n \leq 20$, os termos da sucessão são iguais aos valores da ordem, ou seja, $1 \leq u_n \leq 20$
- Para $n > 20$, os termos da sucessão são iguais a 1, ou -1, pelo que $-1 \leq u_n \leq 1$

Assim, para qualquer valor de n, temos que $-1 \leq u_n \leq 20$, ou seja, a sucessão (u_n) é limitada.

Resposta: **Opção C**

GRUPO II

1. Simplificando as expressões de z_1 e z_2, temos que:

   - Como $i^{19} = i^{4\times 4+3} = i^3 = -i$, vem que:

   $$z_1 = \frac{1-3i^{19}}{1+i} = \frac{1-3(-i)}{1+i} = \frac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i+3i-3i^2}{1-i^2} = \frac{1+2i-3(-1)}{1-(-1)} = \frac{4+2i}{2} = 2+i$$

   - Como $\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 + i(-1) = -i$, vem que:

   $$z_2 = -3k\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -3k(-i) = 3ik$$

   Assim, como a distância entre as imagens geométricas de z_1 e de z_2 é dada por $|z_1 - z_2|$, ou seja:

   $$|z_1-z_2| = |2+i-3ik| = |2+i(1-3k)| = \sqrt{2^2+(1-3k)^2} = \sqrt{4+1-6k+9k^2} = \sqrt{9k^2-6k+5}$$

   E como a distância entre as imagens geométricas de z_1 e de z_2 é igual a $\sqrt{5}$, temo que:

   $$|z_1-z_2| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{9k^2-6k+5} = \sqrt{5} \underset{k>0}{\Rightarrow} \left(\sqrt{9k^2-6k+5}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow 9k^2-6k+5 = 5 \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow 9k^2-6k+5-5 = 0 \Leftrightarrow 9k^2-6k = 0 \Leftrightarrow k(9k-6) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee 9k-6 = 0 \Leftrightarrow$$

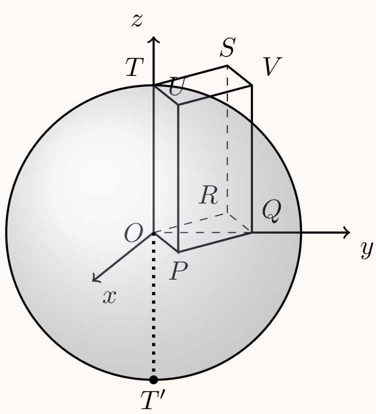
   $$\Leftrightarrow k = 0 \vee k = \frac{6}{9} \Leftrightarrow k = 0 \vee k = \frac{2}{3}$$

   Como $k \in \mathbb{R}^+$, temos que $k = \frac{2}{3}$

2.

   2.1. Como o ponto T pertence ao eixo Oz tem abcissa e ordenada nulas e como pertence ao plano $z=3$, as suas coordenadas são $(0,0,3)$
   Assim, o ponto T' simétrico do ponto T relativamente à origem do referencial tem de coordenadas $(0,0,-3)$
   Assim temos que o centro da superfície esférica é o ponto médio do diâmetro $[TT']$, ou seja, a origem do referencial (como se pretende ilustrar na figura ao lado), e o raio é a distância do ponto T ao centro, ou seja 3, pelo que a equação da superfície esférica é:

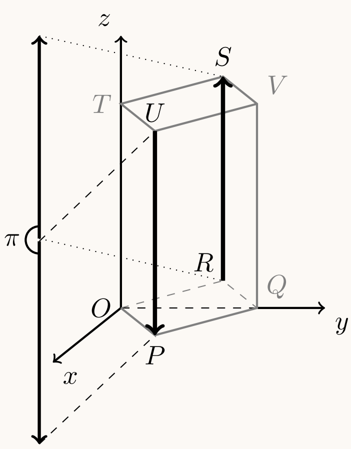
   $$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2 = 3^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 = 9$$



   2.2. Como as arestas $[UP]$ e $[RS]$ são arestas laterais do prisma, logo são paralelas, e ambas têm comprimento igual a 3
   Assim, como os vetores $\overrightarrow{UP}$ e $\overrightarrow{RS}$ têm a mesma direção e sentidos contrários, pelo que o ângulo por eles formado tem amplitude de π radianos.
   Desta forma, o valor do produto escalar $\overrightarrow{UP}\,.\,\overrightarrow{RS}$ é:

   $$\overrightarrow{UP}\,.\,\overrightarrow{RS} = \left\|\overrightarrow{UP}\right\| \times \left\|\overrightarrow{RS}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{UP}\,\hat{}\,\overrightarrow{RS}\right) =$$

   $$= 3\times 3\times \cos\pi = 9\times(-1) = -9$$



2.3. Como o ponto Q pertence ao eixo Oy tem abcissa e cota nulas, e como pertence ao plano PQV de equação $x+y=2$, substituindo o valor da abcissa podemos calcular o valor da ordenada:

$$0+y_Q=2 \Leftrightarrow y_Q=2$$

Assim, verificando que o ponto T tem coordenadas (0,0,3), calculamos as coordenadas do vetor $\overrightarrow{TQ}$:

$$\overrightarrow{TQ}=Q-T=(0{,}2{,}0)-(0{,}0{,}3)=(0{,}2,-3)$$

Assim, considerando $\overrightarrow{TQ}$ é um vetor diretor da reta TQ e que o ponto Q pertence à reta, temos que uma condição cartesiana da reta é:

$$x=0 \wedge \frac{y-2}{2}=\frac{z-0}{-3} \Leftrightarrow x=0 \wedge \frac{y-2}{2}=-\frac{z}{3}$$

2.4. Como o prisma tem 8 vértices, o número de conjuntos de 3 vértices que podem ser escolhidos (número de casos possíveis) é ${}^8C_3$
De entre os ${}^8C_3$ conjuntos de 3 vértices, os que definem planos perpendiculares ao plano xOy deve conter uma aresta perpendicular a este plano.
Como existem 4 arestas nestas condições (ou seja 4 pares de vértices), e por cada uma delas qualquer um dos restantes 6 vértices, define com a aresta um plano perpendicular ao plano xOy, então existem 4×6 casos favoráveis.
Desta forma, a probabilidade é:

$$\frac{4\times 6}{{}^8C_3}=\frac{24}{{}^8C_3}=\frac{3}{7}$$

3. Temos que $P\left(\overline{A}\cup B\right)$, no contexto da situação descrita é a probabilidade de retirar ao acaso uma bola do saco e o número dessa bola ser superior a 6 ou par.
Como consideramos que o saco tem n bolas, existem $n-6$ bolas com um número superior a 6, e ainda 3 bolas com número par, mas inferior a 6 (as bolas com os números 2, 4 e 6).

Desta forma o número de casos possíveis é n, porque existem n bolas no saco e o número de casos favoráveis é $n-6+3=n-3$, e desta forma, recorrendo à Regra de LaPlace, temos que:

$$P\left(\overline{A}\cup B\right)=\frac{n-3}{n}$$

4.

4.1. Temos que $f(0)=9-2{,}5\left(e^{1-0{,}2\times 0}+e^{0{,}2\times 0-1}\right)=9-2{,}5\left(e^{1}+e^{-1}\right)\approx 1{,}28$

E assim, substituindo o valor aproximado de $f(0)$ na equação $\sqrt{f(0)^2+x^2}=2$, vem:

$$\sqrt{1{,}28^2+x^2}=2 \underset{1{,}28^2+x^2>0}{\Leftrightarrow} \left(\sqrt{1{,}28^2+x^2}\right)^2=2^2 \underset{1{,}28^2+x^2>0}{\Leftrightarrow} 1{,}28^2+x^2=4 \Leftrightarrow x^2=4-1{,}28^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2=2{,}3616 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2{,}3616}$$

Como $x\in[0{,}7]$, então a solução da equação é $x=\sqrt{2{,}3616}\approx 1{,}5$

Como $\overline{SP}^2=\overline{OP}^2+\overline{OS}^2$, e $\overline{OP}=f(0)$ e $\overline{OS}=x$, então temos que $\sqrt{f(0)^2+x^2}$ é a distância $\overline{SP}$.
Assim a solução da equação $\sqrt{f(0)^2+x^2}=2$ é a abcissa do ponto S, na posição em que dista duas unidades do ponto P, ou seja, o ponto da superfície do rio que está a 2 metros do topo da parede esquerda que suporta a ponte está a 1,5 metros de distância da base da mesma parede.

4.2. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f:

$$f'(x) = \left(9 - 2{,}5\left(e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}\right)\right)' = (9)' - 2{,}5\left(e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}\right)' =$$

$$= 0 - 2{,}5\Big(\left(e^{1-0{,}2x}\right)' + \left(e^{0{,}2x-1}\right)'\Big) = -2{,}5\Big((1-0{,}2x)'\left(e^{1-0{,}2x}\right) + (0{,}2x-1)'\left(e^{0{,}2x-1}\right)\Big) =$$

$$= -2{,}5\Big(-0{,}2\left(e^{1-0{,}2x}\right) + 0{,}2\left(e^{0{,}2x-1}\right)\Big) = -2{,}5 \times 0{,}2\left(-e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}\right) =$$

$$= -0{,}5\left(-e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}\right)$$

Calculando os zeros da derivada, no domínio da função ($[0{,}7]$), vem:

$$-0{,}5\left(-e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}\right) = 0 \Leftrightarrow -e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1} = 0 \Leftrightarrow e^{0{,}2x-1} = e^{1-0{,}2x} \Leftrightarrow$$

$$0{,}2x - 1 = 1 - 0{,}2x \Leftrightarrow 0{,}2x + 0{,}2x = 1 + 1 \Leftrightarrow 0{,}4x = 2 \Leftrightarrow 4x = 20 \Leftrightarrow x = 5$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		5		7
$f'(x)$	+	+	0	−	−
$f(x)$	min	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	min

Assim, podemos concluir que o valor máximo da função f é atingido quando $x = 5$, ou seja, a distância máxima entre a superfície da água e a ponte é:

$$f(5) = 9 - 2{,}5\left(e^{1-0{,}2\times5} + e^{0{,}2\times5-1}\right) = 9 - 2{,}5\left(e^{1-1} + e^{1-1}\right) = 9 - 2{,}5\left(e^0 + e^0\right) = 9 - 2{,}5\times2 = 9 - 5 = 4$$

Ou seja, o barco do clube náutico não pode passar por baixo da ponte, porque a distância da superfície da água ao topo do mastro é de 6 metros e a maior distância entre a superfície da água e a ponte é de 4 metros.

5.

5.1. Para averiguar se a função g é contínua em $x = 1$, temos que verificar se $g(1) = \lim_{x\to1^-} g(x) = \lim_{x\to1^+} g(x)$

- $g(1) = 2$
- $\lim_{x\to1^-} g(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{1-x^2}{1-e^{x-1}} = \frac{1-(1^-)^2}{1-e^{1-1^-}} = \frac{1-1}{1-e^0} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to1^-} \frac{1-x^2}{1-e^{x-1}} = \lim_{x\to1^-} \frac{-(x^2-1)}{-(e^{x-1}-1)} = \lim_{x\to1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{e^{x-1}-1} = \lim_{x\to1^-}\left(\frac{x-1}{e^{x-1}-1} \times (x+1)\right) =$$

(fazendo $y = x - 1$ temos que se $x \to 1^-$, então $y \to 0^-$)

$$= \lim_{y\to0^-} \frac{y}{e^y - 1} \times \lim_{x\to1^-}(x+1) = \lim_{y\to0^-} \frac{1}{\frac{e^y-1}{y}} \times (1^- + 1) = \frac{1}{\underbrace{\lim_{y\to0^-}\left(\frac{e^y-1}{y}\right)}_{\text{Lim. Notável}}} \times 2 = \frac{1}{1} \times 2 = 2$$

- $\lim_{x\to1^+} g(x) = \lim_{x\to1^+}\left(3 + \frac{\text{sen}\,(x-1)}{1-x}\right) = 3 + \frac{\text{sen}\,(1-1)}{1-1} = 3 - \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to1^+}\left(3 + \frac{\text{sen}\,(x-1)}{1-x}\right) = \lim_{x\to1^+} 3 + \lim_{x\to1^+} \frac{\text{sen}\,(x-1)}{-(x-1)} = 3 - \lim_{x\to1^+} \frac{\text{sen}\,(x-1)}{x-1} =$$

(fazendo $y = x - 1$, temos que se $x \to 1^-$, então $y \to 0^-$)

$$= 3 - \underbrace{\lim_{y\to0^+} \frac{\text{sen}\,y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 3 - 1 = 2$$

Como $g(1) = \lim_{x\to1^-} g(x) = \lim_{x\to1^+} g(x)$, então a função g é contínua em $x = 1$

5.2. Resolvendo a equação $g(x) = 3$, no intervalo $[4,5]$, ou seja, para $x > 1$, vem:

$$3 + \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x} = 3 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x} = 3 - 3 \underset{x \neq 1}{\Leftrightarrow} \operatorname{sen}(x-1) = 0 \times (1-x) \Leftrightarrow \operatorname{sen}(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}(x-1) = \operatorname{sen} 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 1 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Assim, como $\pi \notin [4,5]$; $1+\pi \in [4,5]$ e $1+2\pi \notin [4,5]$ a única solução da equação $g(x) = 3$, no intervalo $[4,5]$ é $1+\pi$

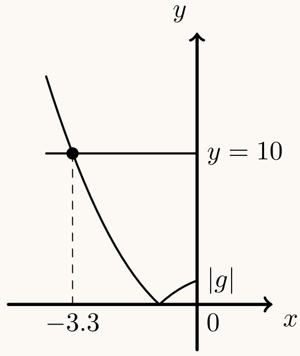
5.3. Como o ponto A é o ponto de abcissa negativa $(x < 1)$ que é a intersecção do gráfico da função g com o eixo das abcissas, tem ordenada nula, e assim, calculamos a abcissa resolvendo a equação:

$$\frac{1-x^2}{1-e^{x-1}} = 0 \underset{x \neq 1}{\Leftrightarrow} 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow 1 = x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} \underset{x<0}{\Rightarrow} x = -1$$

Assim, temos que $\overline{OA} = |-1| = 1$ e considerando o lado $[OA]$ como a base do triângulo $[OAP]$, a altura é o valor absoluto da ordenada do ponto P, pelo que a área do triângulo é igual a 5, se:

$$\frac{\overline{OA} \times |g(x)|}{2} = 5 \Leftrightarrow 1 \times |g(x)| = 5 \times 2 \Leftrightarrow |g(x)| = 10 \Leftrightarrow \left| \frac{1-x^2}{1-e^{x-1}} \right| = 10$$

Visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função $|g|$, para valores inferiores a zero e a reta $y = 10$ (reproduzidos na figura ao lado), e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos, obtemos um valor aproximado (às décimas) da abcissa do ponto P, $x_P \approx -3{,}3$



6. Como $\overline{OP} = \overline{PQ}$, então o triângulo $[OPQ]$ é isósceles e $\overline{OQ} = 2a$

Como as coordenadas do ponto P são $(a,f(a))$ e as do ponto Q são $(2a,0)$, temos que o declive da reta PQ, é:

$$m_{PQ} = \frac{0 - f(a)}{2a - a} = -\frac{f(a)}{a}$$

Como a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa a, então o declive da reta r, ou seja, da reta PQ, é igual a $f'(a)$, pelo que:

$$f'(a) = -\frac{f(a)}{a}$$

Desta forma, temos que:

$$f'(a) + \frac{f(a)}{a} = -\frac{f(a)}{a} + \frac{f(a)}{a} = 0$$