

Exame final nacional de Matemática A (2016, Época especial)

Proposta de resolução



GRUPO I

1. O declive da reta AB é dado por:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - 3}{2 - (-1)} = \frac{1}{2 + 1} = \frac{1}{3}$$

Como retas paralelas têm o mesmo declive, de entre as opções apresentadas a única reta paralela à reta AB é a que tem declive $\frac{1}{3}$

Resposta: **Opção B**

2. Organizando todos os resultados possíveis para os dois números possíveis de observar, recorrendo a uma tabela, temos:

Dado cúbico \ Dado tetraédrico	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46

Assim, podemos verificar que existem $4 \times 6 = 24$ alternativas para os lançamentos das duas pessoas, dos quais apenas 9 tem pelo menos uma face 4, pelo que recorrendo à Regra de Laplace, a probabilidade de, pelo menos, uma pessoa registar o número 4:

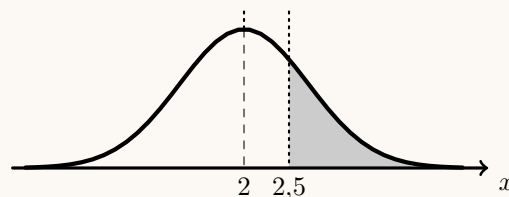
$$p = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

Resposta: **Opção A**

3. Atendendo a que a variável aleatória X segue uma distribuição normal, com $\mu = 2$ e $\sigma = 0,5$, temos que:

- $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = P(1,5 < X < 2,5) \approx 0,6827$

- $P(X > \mu + \sigma) = P(X > 2,5) =$
 $= \frac{1 - P(1,5 < X < 2,5)}{2} \approx \frac{1 - 0,6827}{2} \approx 0,16$



Resposta: **Opção D**

4. Usando a definição de logaritmo, temos que:

$$a = b^3 \Leftrightarrow \log_b a = 3$$

Pelas propriedades operatórias dos logaritmos, vem que:

$$\log_a b + \log_b a = \frac{\log_b b}{\log_b a} + 3 = \frac{1}{3} + 3 = \frac{1}{3} + \frac{9}{3} = \frac{10}{3}$$

Resposta: **Opção C**

5. Pela definição de função composta temos que:

$$(f \circ g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(g(x)) = 0 \Leftrightarrow f(\ln x) = 0$$

Como, pela observação do gráfico, podemos verificar que:

$$f(-1) = 0 \wedge f(1) = 0$$

Desta forma, vem que:

$$(f \circ g)(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \wedge \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e^{-1} \wedge x = e^1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e} \wedge x = e$$

Resposta: **Opção D**



6. Como a função f é contínua em \mathbb{R} , em particular é contínua em $x = -1$, pelo que:

$$f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

Assim, temos que:

- $f(-1) = k + 2$
 - $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\text{sen}(3x + 3)}{4x + 4} = \frac{\text{sen}(3(-1) + 3)}{4(-1) + 4} = \frac{\text{sen}(0)}{0} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)
- (fazendo $y = x + 1$, se $x \rightarrow -1$, então $y \rightarrow 0$, e $3y \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\text{sen}(3(x + 1))}{4(x + 1)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(3y)}{4y} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{4} \times \frac{\text{sen}(3y)}{y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{3}{4} \times \frac{\text{sen}(3y)}{3y} \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{3}{4} \times \underbrace{\lim_{3y \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(3y)}{3y}}_{\text{Lim. Notável}} = \frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Como a função é contínua em $x = -1$, podemos determinar o valor de k :

$$f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \Leftrightarrow k + 2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow k = \frac{3}{4} - 2 \Leftrightarrow k = \frac{3}{4} - \frac{8}{4} \Leftrightarrow k = -\frac{5}{4}$$

Resposta: **Opção B**

7. Analisando cada um dos números complexos das hipóteses apresentadas, podemos verificar que:

- $3 + 4i$ não pertence à região definida pela condição porque

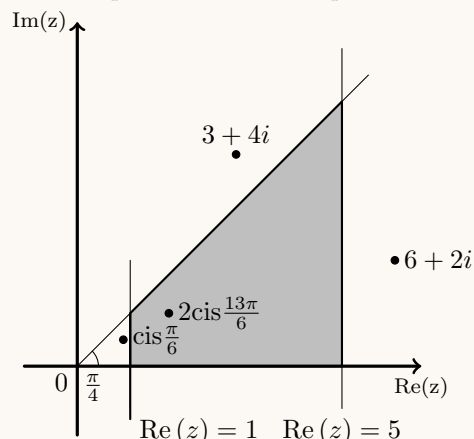
$$\arg(3 + 4i) > \frac{\pi}{4}$$

- $6 + 2i$ não pertence à região definida pela condição porque

$$\text{Re}(6 + 2i) > 5$$

- Como $\text{Re}\left(\text{cis}\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, então $\text{cis}\frac{\pi}{6}$ não pertence à região definida pela condição porque

$$\text{Re}\left(\text{cis}\frac{\pi}{6}\right) < 1$$



Assim, podemos concluir que o número complexo $2\text{cis}\frac{13\pi}{6}$, pertence à região definida pela condição, porque:

- $\text{Re}\left(2\text{cis}\frac{13\pi}{6}\right) = 2\cos\frac{13\pi}{6} = 2\cos\frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, logo $1 < \text{Re}\left(2\text{cis}\frac{13\pi}{6}\right) < 5$
- $\arg\left(2\text{cis}\frac{13\pi}{6}\right) = \arg\left(2\text{cis}\left(\frac{13\pi}{6} - 2\pi\right)\right) = \arg\left(2\text{cis}\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$, logo $0 < \arg\left(2\text{cis}\frac{13\pi}{6}\right) < \frac{\pi}{4}$

Resposta: **Opção C**



8. Determinando o valor de a e de b , temos:

- $a = \lim \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{3n} \right) = \lim \left(\left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)^3 \right) = \left(\lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)^3 = e^3$
- $b = \lim (\ln(1 - 2e^{-n})) = \ln(1 - 2e^{-\infty}) = \ln(1 - 2 \times 0) = \ln 1 = 0$

Resposta: **Opção B**

GRUPO II

1. Simplificando a expressão de z na f.a., como $i^{23} = i^{4 \times 5 + 3} = (i^4)^5 \times i^3 = 1^5 \times i^3 = i^3 = -i$, temos:

$$z = \frac{2i}{1-i} + 2i^{23} = \frac{2i}{1-i} - 2i = \frac{2i}{1-i} - \frac{2i(1-i)}{(1-i)} = \frac{2i}{1-i} - \frac{2i - 2i^2}{1-i} = \frac{2i - 2i + 2i^2}{1-i} = \frac{-2}{1-i}$$

Considerando $1 - i = \rho \operatorname{cis} \theta$, com o objetivo de escrever z na f.t., vem que:

- $\rho = |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{-1}{1} = -1$; como $\operatorname{sen} \theta < 0$ e $\operatorname{cos} \theta > 0$, θ é um ângulo do 4º quadrante, logo
 $\theta = -\frac{\pi}{4}$

Como $-2 = 2 \operatorname{cis} \pi$, temos que:

$$z = \frac{2i}{1-i} + 2i^{23} = \frac{-2}{1-i} = \frac{2 \operatorname{cis} \pi}{\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4} \right)} = \frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{cis} \left(\pi - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = \frac{2\sqrt{2}}{2} \operatorname{cis} \left(\frac{4\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{4}$$

Pelo que o conjugado de z , é:

$$\bar{z} = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{5\pi}{4} \right)$$

E assim, usando a fórmula de Moivre, temos que:

$$w^3 = \bar{z} \Leftrightarrow w^3 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{5\pi}{4} \right) \Leftrightarrow w = \sqrt[3]{\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{5\pi}{4} \right)} \Leftrightarrow w = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \operatorname{cis} \left(\frac{-\frac{5\pi}{4} + 2k\pi}{3} \right), k \in \{0, 1, 2\}$$

Ou seja, temos 3 números complexos w tais que $w^3 = \bar{z}$:

- $k = 0 \rightarrow w_1 = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \operatorname{cis} \left(\frac{-\frac{5\pi}{4} + 0}{3} \right) = \sqrt[6]{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{5\pi}{12} \right)$
- $k = 1 \rightarrow w_2 = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \operatorname{cis} \left(\frac{-\frac{5\pi}{4} + 2\pi}{3} \right) = \sqrt[6]{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} \right) = \sqrt[6]{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{5\pi}{12} + \frac{8\pi}{12} \right) = \sqrt[6]{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$
- $k = 2 \rightarrow w_3 = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \operatorname{cis} \left(\frac{-\frac{5\pi}{4} + 4\pi}{3} \right) = \sqrt[6]{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{5\pi}{12} + \frac{4\pi}{3} \right) = \sqrt[6]{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{5\pi}{12} + \frac{16\pi}{12} \right) = \sqrt[6]{2} \operatorname{cis} \frac{11\pi}{12}$



2.

2.1. Como existem n bolas no saco e são retiradas 3 simultaneamente, o número de conjuntos diferentes de 3 bolas que podemos obter, ou seja, o número de casos possíveis, é ${}^n C_3$

Como n é um número par, existem no saco $\frac{n}{2}$ bolas com números ímpares e $\frac{n}{2}$ bolas com números pares. Como se pretende que duas das bolas tenham um número par, de entre as $\frac{n}{2}$ pretendemos seleccionar 2, e como uma das bolas deve ter um número ímpar de entre as $\frac{n}{2}$ pretendemos seleccionar 1, pelo que o número de casos favoráveis é $\frac{n}{2} C_2 \times \frac{n}{2} C_1 = \frac{n}{2} C_2 \times \frac{n}{2}$

Assim, a probabilidade de duas das 3 bolas terem número par e uma ter número ímpar é: $\frac{\frac{n}{2} C_2 \times \frac{n}{2}}{{}^n C_3}$

2.2. No contexto da situação descrita, $P(A \cap B)$ é a probabilidade de que a primeira bola extraída tenha um número par e que a segunda bola extraída também tenha um número par, ou seja, a probabilidade de que as duas bolas tenham um número par.

No caso de a extração ser feita com reposição, para calcular a probabilidade de que a segunda bola tenha um número par, sabendo que a primeira também tem um número par, devemos considerar 8 casos possíveis (as 8 bolas do saco, porque a primeira bola foi repostada), e 4 casos favoráveis (as 4 bolas com um número par, porque como a primeira bola foi repostada, existem 4 números pares), ou seja:

$$P(B|A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

No caso de a extração ser feita sem reposição, para calcular a probabilidade de que a segunda bola tenha um número par, sabendo que a primeira também tem um número par, devemos considerar 7 casos possíveis (porque das 8 bolas do saco, foi extraída uma que não foi repostada), e 3 casos favoráveis (porque das 4 bolas com um número par existentes inicialmente, uma foi retirada e não foi repostada), ou seja:

$$P(B|A) = \frac{3}{7}$$

Assim, como a probabilidade de que a primeira bola extraída tenha um número par é $P(A) = \frac{1}{2}$, temos que os valores de $P(A \cap B)$ são:

- Com reposição: $a = P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- Sem reposição: $b = P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$

3.

3.1. Como o plano OFB é definido pela equação $3x + 3y - z = 0$, então o vetor $\vec{v} = (3, 3, -1)$ é um vetor normal do plano OFB , e também de todos os planos paralelos a este plano.

Como a reta AF é paralela ao eixo Oz , então as abcissas e ordenadas dos pontos A e F são iguais, pelo que as coordenadas do ponto F são da forma $F(0, 2, z_F)$, e como o ponto F pertence ao plano OFB , podemos determinar a sua cota, recorrendo à equação do plano:

$$3(0) + 3(2) - z_F = 0 \Leftrightarrow 0 + 6 = z_F \Leftrightarrow 6 = z_F$$

Como o ponto D tem a mesma cota do ponto F e a base do prisma é um quadrado paralelo ao plano xOy , pela observação da figura, temos que $x_D = -y_F$ e as coordenadas do ponto D são $D(-2, 0, 6)$. Finalmente, como o plano paralelo ao plano OFB que contém o ponto D tem uma equação da forma $3x + 3y - z + d = 0$, substituindo as coordenadas do ponto D , podemos determinar o valor de d :

$$3(-2) + 3(0) - 6 + d = 0 \Leftrightarrow -6 + 0 - 6 + d = 0 \Leftrightarrow d = 12$$

E assim a equação do plano é:

$$3x + 3y - z + 12 = 0$$



- 3.2. Como o ponto B tem a mesma cota do ponto A e a base do prisma é um quadrado contido no plano xOy , pela observação da figura, temos que $x_B = -y_A$ e as coordenadas do ponto B são $D(-2,2,0)$. Desta forma, um vetor diretor da reta OB é

$$\overrightarrow{OB} = B - O = (-2,2,0) - (0,0,0) = (-2,2,0)$$

E uma equação vetorial da reta OB é:

$$(x,y,z) = (0,0,0) + \lambda(-2,2,0), \lambda \in \mathbb{R}$$

Pelo que podemos obter uma condição cartesiana da reta OB , a partir da equação vetorial:

$$\begin{cases} x = 0 - 2\lambda \\ y = 0 + 2\lambda \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{x}{2} = \lambda \\ \frac{y}{2} = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{x}{2} = \frac{y}{2} \wedge z = 0$$

- 3.3. Como o ponto P pertence à aresta $[BG]$, pela observação da figura, verificamos que tem abcissa e ordenada iguais aos pontos B e G , pelo que as suas coordenadas são:

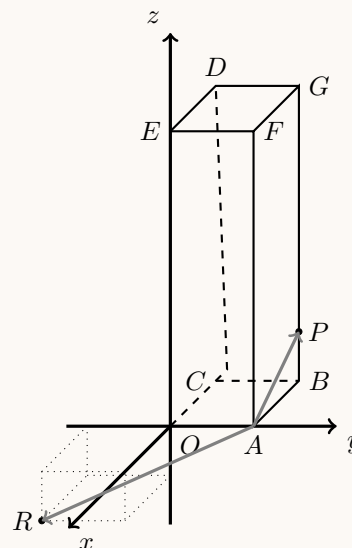
$$P(-2,2,1)$$

Como o ponto R é simétrico do ponto P relativamente à origem, tem as três coordenadas simétricas, ou seja, tem as suas coordenadas são:

$$R(2, -2, -1)$$

Podemos determinar a amplitude do ângulo RAP através do produto escalar dos vetores \overrightarrow{AP} e \overrightarrow{AR} , pelo que, determinando as coordenadas destes vetores e as respetivas normas, temos:

- $\overrightarrow{AP} = P - A = (-2,2,1) - (0,2,0) = (-2,0,1)$
 $\|\overrightarrow{AP}\| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$
- $\overrightarrow{AR} = R - A = (2, -2, -1) - (0,2,0) = (2, -4, -1)$
 $\|\overrightarrow{AR}\| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+16+1} = \sqrt{21}$



Recorrendo à fórmula do produto escalar vem:

$$\cos(\widehat{APR}) = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AR}}{\|\overrightarrow{AP}\| \times \|\overrightarrow{AR}\|} = \frac{(-2,0,1) \cdot (2, -4, -1)}{\sqrt{5} \times \sqrt{21}} = \frac{-4+0-1}{\sqrt{5} \times \sqrt{21}} = \frac{-5}{\sqrt{105}} = -\frac{5}{\sqrt{105}}$$

Logo, a amplitude do ângulo RAP , em graus, arredondado às unidades, é

$$\widehat{RAP} = \cos^{-1}\left(-\frac{5}{\sqrt{105}}\right) \approx 119^\circ$$



4.

4.1. Calculando o valor do limite, temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^x + x) - x) = \ln(e^{+\infty} + \infty) - \infty = +\infty - \infty \quad (\text{Indeterminação}) \\
\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^x \times (1 + \frac{x}{e^x})) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^x) + \ln(1 + \frac{x}{e^x}) - x) = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \ln(1 + \frac{x}{e^x}) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + \frac{x}{e^x}) = \ln\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{x}{e^x})\right) = \\
&= \ln\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}\right) = \ln\left(1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}}\right) = \ln\left(1 + \underbrace{\frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}}}_{\text{Lim. Notável}}\right) = \\
&= \ln\left(1 + \frac{1}{+\infty}\right) = \ln(1 + 0) = 0
\end{aligned}$$

Assim, como $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$, podemos concluir que a reta de equação $y = x$ é uma assíntota do gráfico da função f , quando $x \rightarrow +\infty$



4.2. Para estudar o sentido das concavidades do gráfico e a existência de pontos de inflexão no intervalo $\left] -\frac{3\pi}{2}, 0 \right[$, vamos determinar a expressão da segunda derivada, pelo que começamos por determinar f' em $\left] -\frac{3\pi}{2}, 0 \right[$:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + \cos x \right)' = \left(\frac{1}{4}x^2 \right)' + (\cos x)' = \frac{1}{4}(x^2)' + (-\text{sen } x) = \frac{1}{4} \times 2x - \text{sen } x = \frac{1}{2}x - \text{sen } x$$

Assim, determinando f'' em $\left] -\frac{3\pi}{2}, 0 \right[$, temos que:



$$f''(x) = (f'(x))' = \left(\frac{1}{2}x - \text{sen } x \right)' = \left(\frac{1}{2}x \right)' - (\text{sen } x)' = \frac{1}{2} - \cos x$$

Como os pontos de inflexão são zeros da segunda derivada, vamos determiná-los:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para $k = 0$, vem $x = \frac{\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{3}$, e como $x \in \left] -\frac{3\pi}{2}, 0 \right[$, podemos verificar que a única solução da equação é $x = -\frac{\pi}{3}$

Assim, estudando o sinal da segunda derivada para relacionar com o sentido das concavidades, vem:

x	$-\frac{3\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{3}$		0
$f''(x)$	n.d.	+	0	-	n.d.
$f(x)$	n.d.		Pt. I.		n.d.

Logo, podemos concluir que o gráfico de f :

- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left] -\frac{\pi}{3}, 0 \right[$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left] -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{3} \right[$
- tem um ponto de inflexão cuja abcissa é $-\frac{\pi}{3}$

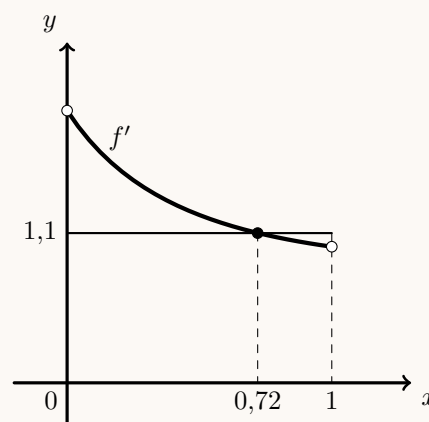
4.3. Como o declive da reta tangente ao gráfico de uma função num ponto é igual ao valor numérico da derivada no ponto, ou seja, $f'(a) = 1,1$, determinamos a expressão da derivada relativa ao intervalo $]0, 1[$:

$$f'(x) = (\ln(e^x + x))' = \frac{(e^x + x)'}{e^x + x} = \frac{(e^x)' + (x)'}{e^x + x} = \frac{e^x + 1}{e^x + x}$$

Assim, como o declive da reta tangente é 1,1, o valor de a é a solução da equação

$$f'(a) = 1,1 \Leftrightarrow \frac{e^a + 1}{e^a + a} = 1,1$$

Visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função f' , e a reta horizontal definida por $y = 1,1$ numa janela coerente com a restrição $x \in]0, 1[$, e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos, obtemos um valor aproximado (às centésimas) da abcissa do ponto A , $a = x_A \approx 0,72$



5.

5.1. De acordo com os dados do enunciado temos que $x = 25$, pelo que a velocidade constante da nave, em quilómetros por segundo, quando termina a queima do combustível é dada por:

$$V(25) = 3 \ln \left(\frac{25 + 300}{25 + 60} \right) = 3 \ln \left(\frac{325}{85} \right) \approx 4,02 \text{ km/s}$$

Assim, como a relação entre o tempo (t), a distância (d) e a velocidade (V), em segundos, arredondada às unidades, é:

$$V = \frac{d}{t} \Leftrightarrow t = \frac{d}{V}$$

Temos que para viajar 200 quilómetros ($d = 200$) a esta velocidade ($V = 4,02$), o tempo necessário é:

$$t = \frac{200}{4,02} \approx 50 \text{ s}$$

5.2. Pretende-se determinar o valor de x associado ao valor de $V = 3$, ou seja, a solução da equação $V(x) = 3$

Resolvendo a equação, e arredondando o resultado às unidades, vem que:

$$\begin{aligned} V(x) = 3 &\Leftrightarrow 3 \ln \left(\frac{x + 300}{x + 60} \right) = 3 \Leftrightarrow \ln \left(\frac{x + 300}{x + 60} \right) = \frac{3}{3} \Leftrightarrow \ln \left(\frac{x + 300}{x + 60} \right) = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{x + 300}{x + 60} = e^1 \Leftrightarrow_{x \neq -60} x + 300 = e(x + 60) \Leftrightarrow x + 300 = ex + 60e \Leftrightarrow x - ex = 60e - 300 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x(1 - e) = 60e - 300 \Leftrightarrow x = \frac{60e - 300}{1 - e} \Rightarrow x \approx 80 \text{ milhares de toneladas} \end{aligned}$$

6. Simplificando a expressão da inequação, temos que:

$$g(0) \times g(k) < 0 \Leftrightarrow \ln(0 + k) \times \ln(k + k) < 0 \Leftrightarrow \ln k \times \ln(2k) < 0$$

Atendendo a que:

- $\ln k = 0 \Leftrightarrow k = e^0 \Leftrightarrow k = 1$
- $\ln(2k) = 0 \Leftrightarrow 2k = e^0 \Leftrightarrow 2k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$

Como k é um número real positivo ($k \in]0, +\infty[$) estudamos o sinal do produto, em $]0, +\infty[$, através de um quadro de variação de sinal, para resolver a inequação:

k	0		$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$\ln k$	n.d.	-	-	-	0	+
$\ln(2k)$	n.d.	-	0	+	+	+
$g(0) \times g(k)$	n.d.	+	0	-	0	+

Pelo que se concluí que se $g(0) \times g(k) < 0$, então $k \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right[$

