Exame final nacional de Matemática A **(2015, Época especial)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, substituindo os valores conhecidos, podemos calcular $P(A)$:

$$0{,}7 = P(A) + 0{,}4 - 0{,}2 \;\Leftrightarrow\; 0{,}7 - 0{,}4 + 0{,}2 = P(A) \;\Leftrightarrow\; 0{,}5 = P(A)$$

   Como $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$, vem que

$$P(B|A) = \frac{0{,}2}{0{,}5} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

   Resposta: **Opção D**

2. Calculando o número de grupos ordenados de três rapazes, temos ${}^3A_3 = P_3 = 3!$ hipóteses para dispor os três rapazes juntos.
   E por cada grupo de rapazes, existem ${}^7A_7 = P_7 = 7!$ ordenações possíveis dos nove jovens, correspondendo à disposição das 6 raparigas e do grupo de rapazes, considerando a ordenação relevante.
   Assim, o número de maneiras de dispor os nove jovens, com os três rapazes juntos é

$$3! \times 7! = 30\,240$$

   Resposta: **Opção B**

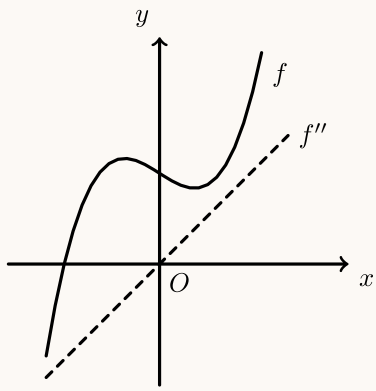
3. Como o ponto P pertence ao gráfico de f, substituindo as suas coordenadas na expressão algébrica da função, temos que

$$8 = e^{a \ln 2} \;\Leftrightarrow\; 8 = \left(e^{\ln 2}\right)^a \;\Leftrightarrow\; 8 = 2^a \;\Leftrightarrow\; a = \log_2 8 \;\Leftrightarrow\; a = 3$$

   Resposta: **Opção C**

4. Por observação do gráfico de f, podemos observar o sentido das concavidades e relacionar com o sinal da segunda derivada, f'' (admitindo que o ponto de inflexão tem abcissa zero).

x		0	
$f(x)$		Pt. I.	
$f''(x)$	$-$	0	$+$



O único gráfico compatível com o sentido das concavidades do gráfico identificadas é o gráfico da opção (C).

Resposta: **Opção C**

5. Temos que, pela definição de derivada num ponto $f'(2) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = 6$

Assim, vem que

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x^2-2x} = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x(x-2)} = \lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x} \times \frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x} \times \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

Resposta: **Opção A**

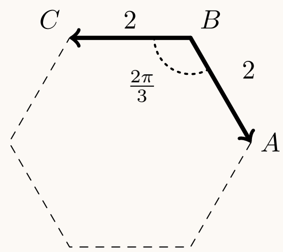
6. Analisando cada uma das afirmações temos

- **(A)** $|z_3 - z_1| = |z_4 - z_2|$ é uma afirmação **verdadeira** porque $|z_3 - z_1|$ é a distância entre os vértices correspondentes ao complexos z_3 e z_1, (ou seja a medida da diagonal do quadrado), tal como $|z_4 - z_2|$ representa a medida da outra diagonal do quadrado.
  Como as medidas das diagonais do quadrado são iguais, a afirmação é verdadeira.
- $z_1 + z_4 = 2\,\mathrm{Re}\,(z_1)$ é uma afirmação **verdadeira** porque como o centro do quadrado está centrado na origem e os lados são paralelos aos eixos, os vértices do quadrado estão sobre as bissetrizes dos quadrantes, ou seja, $z_1 = a + ai$ e $z_4 = a - ai$, com $a \in \mathbb{R}^+$
  Assim, vem que $z_1 + z_4 = a + ai + a - ai = 2a = 2\,\mathrm{Re}\,(z_1)$
- **(C)** $\dfrac{z_4}{i} = z_1$ é uma afirmação **falsa** porque $\dfrac{z_4}{i} = z_1 \Leftrightarrow z_4 = z_1 \times i$ e $z_1 = a + ai$ e $z_4 = a - ai$, com $a \in \mathbb{R}^+$
  Como $z_1 \times i = (a + ai) \times i = ai + ai^2 = ai + a(-1) = ai - a = -a + ai = z_2$
  Ou seja, multiplicar por i corresponde geometricamente a fazer uma rotação de $\dfrac{\pi}{2}$ radianos, no sentido positivo. Assim, fazendo a uma rotação deste tipo da imagem geométrica de z_1, obtemos a imagem geométrica de z_2 e não a imagem geométrica de z_4
- **(D)** $-\overline{z_1} = z_2$ é uma afirmação **verdadeira** porque $z_1 = a + ai$ e $z_2 = -a + ai$, com $a \in \mathbb{R}^+$
  Logo $-\overline{z_1} = -\left(\overline{a + ai}\right) = -(a - ai) = -a + ai = z_2$

Resposta: **Opção C**

7. Como os segmentos de reta $[AB]$ e $[BC]$ são lados consecutivos de um hexágono regular de perímetro 12, temos que:

$$\left\|\overrightarrow{BA}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \frac{12}{6} = 2$$



Como os hexágonos regulares podem ser decompostos em seis triângulos equiláteros, cada ângulo interno do hexágono regular tem o dobro da amplitude dos ângulos internos de um triângulo equilátero, ou seja:

$$\overrightarrow{BA}\hat{\ }\overrightarrow{BC} = 2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

Assim, vem que

$$\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BC} = \cos\left(\overrightarrow{BA}\hat{\ }\overrightarrow{BC}\right) \times \left\|\overrightarrow{BA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \times 2 \times 2 = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \times 4 = -\frac{1}{2} \times 4 = -\frac{4}{2} = -2$$

Resposta: **Opção B**

8. Como (a_n) é progressão geométrica (a_n), designado por r a razão, temos que o termo de ordem n é

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

Assim, temos que

- $a_3 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a_1 \times r^{3-1} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a_1 \times r^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a_1 = \frac{1}{4 \times r^2}$
- $a_6 = 2 \Leftrightarrow a_1 \times r^{6-1} = 2 \Leftrightarrow a_1 \times r^5 = 2 \Leftrightarrow a_1 = \frac{2}{r^5}$

Desta forma, podemos calcular o valor da razão:

$$\frac{1}{4 \times r^2} = \frac{2}{r^5} \Leftrightarrow \frac{r^5}{r^2} = 2 \times 4 \Leftrightarrow r^3 = 8 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow r = 2$$

E o valor do primeiro termo:

$$a_6 = 2 \Leftrightarrow a_1 = \frac{2}{r^5} \underset{r=2}{\Leftrightarrow} a_1 = \frac{2}{2^5} \Leftrightarrow a_1 = \frac{1}{2^4}$$

Assim, calculado o valor do vigésimo termo, vem

$$a_{20} = a_1 \times r^{20-1} = \frac{1}{2^4} \times 2^{19} = \frac{2^{19}}{2^4} = 2^{19-4} = 2^{15} = 32\,768$$

Resposta: **Opção C**

GRUPO II

1. Escrevendo $1+i$ na f.t. temos $1+i=\rho\operatorname{cis}\theta$, onde:

   - $\rho=|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$
   - $\operatorname{tg}\theta=\frac{1}{1}=1$; como $\operatorname{sen}\theta>0$ e $\cos\theta>0$, θ é um ângulo do 1º quadrante, logo $\theta=\frac{\pi}{4}$

   E assim $1+i=\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$, pelo que, recorrendo à fórmula de Moivre, temos

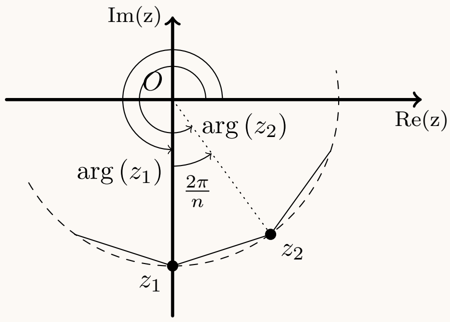
   $$z_1=(1+i)^6=\left(\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\right)^6=\left(\sqrt{2}\right)^6\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\times 6\right)=\left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^3\operatorname{cis}\frac{6\pi}{4}=2^3\operatorname{cis}\frac{3\pi}{2}=8\operatorname{cis}\frac{3\pi}{2}$$

   Como $8i=8\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}$, calculando o quociente de complexos na f.t., temos:

   $$z_2=\frac{8i}{\operatorname{cis}\left(-\frac{6\pi}{5}\right)}=\frac{8\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}}{\operatorname{cis}\left(-\frac{6\pi}{5}\right)}=\frac{8}{1}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{6\pi}{5}\right)\right)=8\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{6\pi}{5}\right)=$$

   $$=8\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{10}+\frac{12\pi}{10}\right)=8\operatorname{cis}\frac{17\pi}{10}$$

   Como um polígono regular de n lados, pode ser dividido em n triângulos isósceles, em que a soma dos ângulos adjacentes, junto da origem é 2π, então cada um destes ângulo tem amplitude $\frac{2\pi}{n}$

   Como as imagens geométricas de z_1 e z_2 são vértices de um destes triângulos então os respetivos argumentos diferem de $\frac{2\pi}{n}$, ou seja

   $$\arg(z_2)-\arg(z_1)=\frac{2\pi}{n}$$

   Assim, temos que

   $$\arg(z_2)-\arg(z_1)=\frac{2\pi}{n}\Leftrightarrow\frac{17\pi}{10}-\frac{3\pi}{2}=\frac{2\pi}{n}\Leftrightarrow\frac{17\pi}{10}-\frac{15\pi}{10}=\frac{2\pi}{n}\Leftrightarrow\frac{2\pi}{10}=\frac{2\pi}{n}\Leftrightarrow n=\frac{2\pi\times 10}{2\pi}\Leftrightarrow n=10$$

2.

   2.1. Como a reta OP é perpendicular ao plano β, qualquer vetor com a direção da reta (e em particular o $\overrightarrow{OP}$) e o vetor normal do plano $\vec{u}$ são colineares.

   Temos que $\vec{u}=(2,-1,1)$ e $\overrightarrow{OP}=P-O=(-2,1,3a)-(0,0,0)=(-2,1,3a)$

   Como os vetores são colineares, temos que $\overrightarrow{OP}=\lambda\vec{u},\lambda\in\mathbb{R}$

   $$(-2,1,3a)=\lambda(2,-1,1)\Leftrightarrow -2=2\lambda\wedge 1=-1\lambda\wedge 3a=\lambda\Leftrightarrow -1\lambda\wedge -1=\lambda\wedge a=\frac{\lambda}{3}$$

   Logo, temos que:

   $$a=\frac{-1}{3}\Leftrightarrow a=-\frac{1}{3}$$

2.2. Como o ponto B pertence ao eixo Ox, tem ordenada e cota nulas, pelo que, podemos determinar a sua abcissa, recorrendo à equação do plano β:

$$2x - y + z - 4 = 0 \wedge y = 0 \wedge z = 0 \Rightarrow 2x - 0 + 0 - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$$

E assim temos as coordenadas do ponto B, $B(2{,}0{,}0)$ e podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$, e a sua norma:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2{,}0{,}0) - (1{,}2{,}3) = (1, -2, -3)$$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

Como o ponto C é o simétrico do ponto B relativamente ao plano yOz, tem as mesmas ordenada e cota, e abcissa simétrica, ou seja, as coordenadas do ponto C são $C(-2{,}0{,}0)$ e podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AC}$, e a sua norma:

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-2{,}0{,}0) - (1{,}2{,}3) = (-3, -2, -3)$$

$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+4+9} = \sqrt{22}$$

Recorrendo à fórmula do produto escalar vem:

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}\hat{\ }\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{(1, -2, -3).(-3, -2, -3)}{\sqrt{14} \times \sqrt{22}} = \frac{-3+4+9}{\sqrt{14 \times 22}} = \frac{10}{\sqrt{308}}$$

Logo, a amplitude do ângulo BAC, em graus, arredondado às unidades, é

$$B\hat{A}C = \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{308}}\right) \approx 55°$$

2.3. A reta OP é perpendicular ao plano β e contém o centro da superfície esférica, pelo que a interseção da reta OP com o plano β é o ponto de tangência.
Usando os elementos do item anterior para determinar equações cartesianas da reta OP, considerando o ponto da reta $O = (0,0,0)$ e o vetor diretor $\overrightarrow{OP} = \left(-2,1,3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)\right) = (-2,1,-1)$, temos as equações:

$$\frac{x-0}{-2} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{-1} \Leftrightarrow -\frac{x}{2} = y = -z$$

Determinado as coordenadas do ponto de interseção da reta OP com o plano β, vem:

$$\begin{cases} 2x - y + z - 4 = 0 \\ -\frac{x}{2} = y \\ y = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(-2y) - y + (-y) - 4 = 0 \\ x = -2y \\ -y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4y - y - y - 4 = 0 \\ x = -2y \\ -y = z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6y = 4 \\ x = -2y \\ -y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4}{-6} \\ x = -2y \\ -y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{2}{3} \\ x = -2\left(-\frac{2}{3}\right) \\ -\left(-\frac{2}{3}\right) = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{2}{3} \\ x = \frac{4}{3} \\ z = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Assim, o ponto de tangência da superfície esférica com o plano β é o ponto $Q\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e a medida do raio é

$$\overline{OQ} = \sqrt{\left(\frac{4}{3} - 0\right)^2 + \left(-\frac{2}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{24}{9}}$$

E assim, a equação da superfície esférica é

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = \left(\sqrt{\frac{24}{9}}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \frac{24}{9}$$

3.

3.1. Determinando a probabilidade com recurso à Regra de LaPlace, calculamos o quociente do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis, sendo os casos possíveis equiprováveis.

Para calcular o número de casos possíveis, calculamos o número de arranjos completos (porque pode haver repetição) de 9 elementos (bolas) para 3 posições (extrações), ou seja, ${}^9A'_3 = 9^3 = 729$ casos possíveis.

O número de casos favoráveis pode ser calculado observando que a única combinação de números que gera um produto igual a dois é a extração de uma única bola com o número 2 e as restantes duas extrações da bola com o número 1.
Como no cálculo do número de casos possíveis consideramos a ordem relevante, neste caso também deve ser considerado, pelo que temos que escolher a posição da extração da bola com o número 2: ${}^3C_2 = 3$ casos favoráveis.
(Poderíamos escrever ${}^3C_2 \times 1 \times 1 \times 1$ para enfatizar que depois de escolher a posição de ocorrência da extração da bola com o número 2, existe apenas 1 bola que gera um caso favorável, em cada extração).

Assim, calculando a probabilidade com recurso à Regra de Laplace, e apresentando o resultado na forma o resultado na forma de fração irredutível, temos

$$p = \frac{{}^3C_2}{9^3} = \frac{1}{243}$$

3.2. Como a variável X segue distribuição binomial, na repetição independente de 10 provas da mesma experiência, temos que, a probabilidade do sucesso é a probabilidade de ocorrência do acontecimento definido, ou seja, a probabilidade de que a soma das duas bolas retiradas seja 7, em cada uma das repetições da experiência aleatória.
Como existem 9 bolas no saco, existem ${}^9C_2$ pares de bolas, que se podem retirar simultaneamente, ou seja, o número de casos possíveis em cada realização da experiência. O número de casos favoráveis é 3 (correspondentes às somas 1+6, 2+5 e 3+4), pelo que a probabilidade é

$$p = \frac{3}{{}^9C_2} = \frac{1}{12}$$

A ocorrência de n sucessos, implica a ocorrência de $10 - n$ insucessos, pelo que $\frac{11}{12}$, é a probabilidade do insucesso, ou seja, a probabilidade de que não ocorra a soma 7, em cada uma das realizações da experiência aleatória.

A expressão ${}^{10}C_n$ permite considerar que os n sucessos esperados ocorram em qualquer conjunto de n experiências, no universo das 10 realizações, ou seja, o número de posições diferentes na sequência de 10 realizações, em que podem ocorrer os n sucessos.

4.

4.1. Calculando as imagens dos objetos 20 e 10, temos

$$N(20) = \frac{200}{1+50e^{-0,25\times 20}} = \frac{200}{1+50e^{-5}} \approx 149{,}60$$

$$N(10) = \frac{200}{1+50e^{-0,25\times 10}} = \frac{200}{1+50e^{-2,5}} \approx 39{,}18$$

E assim, calculando a taxa média de variação da função N no intervalo $[10,20]$ e apresentando o resultado arredondado às unidades, temos

$$TVM_{[10,20]} = \frac{N(20)-N(10)}{20-10} \approx \frac{149{,}60-39{,}18}{10} \approx \frac{110{,}42}{10} \approx 11{,}042 \approx 11$$

No contexto da situação descrita, o valor da taxa média de variação significa que entre os anos de 1900 e 2000 o número de habitantes, da região do globo em causa, cresceu em média aproximadamente 11 milhões em cada década.

4.2. Resolvendo em ordem a t, temos:

$$N = \frac{200}{1+50e^{-0,25t}} \Leftrightarrow 1+50e^{-0,25t} = \frac{200}{N} \Leftrightarrow 50e^{-0,25t} = \frac{200}{N} - 1 \Leftrightarrow 50e^{-0,25t} = \frac{200}{N} - \frac{N}{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 50e^{-0,25t} = \frac{200-N}{N} \Leftrightarrow e^{-0,25t} = \frac{200-N}{50N} \Leftrightarrow -0{,}25t = \ln\left(\frac{200-N}{50N}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{200-N}{50N}\right)}{-0{,}25} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{1}{0{,}25}\ln\left(\frac{200-N}{50N}\right) \Leftrightarrow t = -\frac{1}{\frac{25}{100}}\ln\left(\frac{200-N}{50N}\right) \Leftrightarrow t = -\frac{100}{25}\ln\left(\frac{200-N}{50N}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = -4\ln\left(\frac{200-N}{50N}\right) \Leftrightarrow t = \ln\left(\frac{200-N}{50N}\right)^{-4} \Leftrightarrow t = \ln\left(\frac{50N}{200-N}\right)^{4}$$

5.

5.1. Como o domínio da função é $\mathbb{R}_0^+$, a eventual existência de uma assíntota horizontal será quando $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x^2e^{1-x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x^2 \times \frac{e^1}{e^x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(e \times \frac{x^2}{e^x}\right) = \lim_{x\to+\infty} e \times \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} =$$

$$= e \times \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x^2}} = e \times \frac{\lim_{x\to+\infty} 1}{\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}}_{\text{Lim. Notável}}} = e \times \frac{1}{+\infty} = e \times 0 = 0$$

Logo, como $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, podemos concluir que a reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal do gráfico de f

5.2. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f:

$$f'(x) = \left(x^2e^{1-x}\right)' = \left(x^2\right)' \times e^{1-x} + x^2 \times \left(e^{1-x}\right)' = 2xe^{1-x} + x^2 \times (1-x)' \times e^{1-x} =$$
$$= 2xe^{1-x} + x^2 \times (-1) \times e^{1-x} = 2xe^{1-x} - x^2e^{1-x}$$

Calculando os zeros da derivada, no domínio da função ($\mathbb{R}_0^+$), vem:

$$2xe^{1-x} - x^2e^{1-x} = 0 \Leftrightarrow xe^{1-x}(2-x) = 0 \Leftrightarrow xe^{1-x} = 0 \vee 2-x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee \underbrace{e^{1-x} = 0}_{\text{Impossível}} \vee 2 = x \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

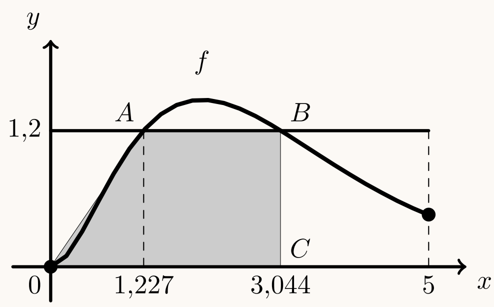
Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		2	$+\infty$
$f'(x)$	0	+	0	−
$f(x)$	min	↗	Máx	↘

Assim, podemos concluir que a função f:

- é crescente no intervalo $[0,2]$;
- é decrescente no intervalo $[2,+\infty[$;
- tem um mínimo para $x = 0$
- tem um máximo para $x = 2$

5.3. Visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função f, e a reta horizontal de equação $y = 1{,}2$, numa janela compatível com o intervalo definido ($x \in [0,5]$), (reproduzido na figura ao lado), e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos, obtemos valores aproximados (às milésimas) para as coordenadas dos pontos A e B: $A(1{,}227;1{,}2)$ e $B(3{,}044;1{,}2)$
Assim, podemos também assumir o valor aproximado de 3,044 para a abcissa do ponto C e representar o quadrilátero $[OABC]$, constatando que é um trapézio.



Desta forma temos as medidas aproximadas da base maior ($\overline{OC} = x_C - x_O \approx 3{,}044 - 0 \approx 3{,}044$), da base menor ($\overline{AB} = x_B - x_A \approx 3{,}044 - 1{,}227 \approx 1{,}817$) e da altura ($\overline{BC} = y_B - y_C \approx 1{,}2 - 0 \approx 1{,}2$), pelo que a área do trapézio $[OABC]$, arredondada às centésimas, é

$$A_{[OABC]} = \frac{\overline{OC} + \overline{AB}}{2} \times \overline{BC} \approx \frac{3{,}044 + 1{,}817}{2} \times 1{,}2 \approx 2{,}92$$

6. Como a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $\frac{2\pi}{3}$, o declive da reta r é o valor da função derivada no ponto de abcissa $\frac{2\pi}{3}$: $\left(m_r = f'\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

   Assim, temos

$$f'(x) = \left(a \operatorname{sen} x\right)' = (a)'(\operatorname{sen} x) + a\left(\operatorname{sen} x\right)' = 0 + a\cos x = a\cos x$$

   pelo que

$$m_r = f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = a\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = a\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = a\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{a}{2}$$

   Como o declive de uma reta é a tangente da inclinação, temos também que

$$m_r = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

   E assim, igualando as duas expressões para o declive da reta r, podemos calcular o valor de a:

$$-\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow a = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$