Exame final nacional de Matemática A **(2015, 2.ª fase)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. O valor médio da variável aleatória X é: $\mu = 1 \times a + 2 \times 2a + 3 \times 0{,}4$

   Como, numa distribuição de probabilidades de uma variável aleatória, a soma das probabilidades é 1, vem que
   $$a + 2a + 0{,}4 = 1 \Leftrightarrow 3a = 1 - 0{,}4 \Leftrightarrow 3a = 0{,}6 \Leftrightarrow a = \frac{0{,}6}{3} \Leftrightarrow a = 0{,}2$$
   Assim, substituindo o valor de a no cálculo do valor médio da variável X, vem:
   $$\mu = 1 \times 0{,}2 + 2 \times 2(0{,}2) + 3 \times 0{,}4 = 0{,}2 + 2(0{,}4) + 1{,}2 = 0{,}2 + 0{,}8 + 1{,}2 = 2{,}2$$
   Resposta: **Opção B**

2. No contexto da situação descrita $P(A|B)$ é a probabilidade de que, retirando ao acaso uma bola do saco, ela seja preta sabendo que tem um número par.

   Como existem apenas 4 bolas numeradas com números pares (nomeadamente as bolas com os números 2, 4, 6 e 8), temos que o número de casos possíveis é 4.

   Destas, apenas as bolas com os números 2 e 4 são pretas (porque "As bolas numeradas de 1 a 5 são pretas"), pelo que existem 2 casos favoráveis, e assim, recorrendo à Regra de Laplace para o cálculo da probabilidade, vem:
   $$P(A|B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
   Resposta: **Opção B**

3. Usando as propriedades dos logaritmos, temos que
   $$\log_a \left(a^2 b\right) = \log_a (a^2) + \log_a b = 2 \log_a a + \frac{\log_b b}{\log_b a} = 2 \times 1 + \frac{1}{\frac{1}{3}} = 2 + 3 = 5$$
   Resposta: **Opção D**

4. Como a função é contínua em $\mathbb{R}$, também é contínua em $x=0$, pelo que

$$f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

Temos que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 2 + e^{0+k} = 2 + e^k$

E calculando $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, vem

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x + \ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{2x}{x} + \frac{\ln(x+1)}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \left(2 + \frac{\ln(x+1)}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} 2 + \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = 2 + 1 = 3$$

Assim, como $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, vem que

$$2 + e^k = 3 \ \Leftrightarrow\ e^k = 3 - 2 \ \Leftrightarrow\ e^k = 1 \ \Leftrightarrow\ k = \ln 1 \ \Leftrightarrow\ k = 0$$

Resposta: **Opção A**

5. Determinando a expressão da primeira derivada, f', vem:

$$f'(x) = \big(f(x)\big)' = \big(3\,\text{sen}^2(x)\big)' = \big(3\,\text{sen}\,(x)\,\text{sen}\,(x)\big)' = 3\big(\text{sen}\,(x)\,\text{sen}\,(x)\big)' =$$

$$= 3\Big(\big(\text{sen}\,(x)\big)'\,\text{sen}\,(x) + \text{sen}\,(x)\big(\text{sen}\,(x)\big)'\Big) = 3 \times 2\big(\text{sen}\,(x)\big)'\,\text{sen}\,(x) = 3 \times 2\big(\cos(x)\,\text{sen}\,(x)\big) =$$

$$= 3 \times \underbrace{2\,\text{sen}\,(x)\cos(x)}_{\text{sen}\,(2x)} = 3\,\text{sen}\,(2x)$$

Determinando a expressão da segunda derivada, f'', temos que:

$$f''(x) = \big(f'(x)\big)' = \big(3\,\text{sen}\,(2x)\big)' = 3\big((2x)'\cos(2x)\big) = 3\big(2\cos(2x)\big) = 6\cos(2x)$$

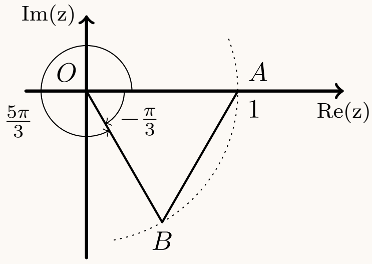
Resposta: **Opção C**

6. Como o triângulo $[OAB]$ é equilátero, temos que

$$|z| = \overline{OB} = \overline{OA} = 1$$

Por outro lado, como a amplitude de cada um dos ângulos internos do triângulo equilátero é $\frac{\pi}{3}$, e o ponto B está no 4º quadrante, temos que $\arg(z) = -\frac{\pi}{3}$, ou então

$$\arg(z) = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$



E assim, vem que

$$z = 1\,\text{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \text{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

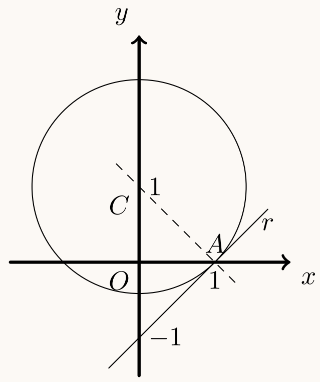
Resposta: **Opção D**

7. Determinando as abcissas dos pontos de interseção da circunferência com o eixo Ox, como estes pontos têm ordenada nula ($y = 0$), vem

$$x^2 + (0-1)^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 2 - 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$

Como o ponto A tem abcissa positiva é o ponto de coordenadas (1,0)
Como o centro da circunferência é o ponto C de coordenadas (0,1), a reta CA que contém o raio $[CA]$ da circunferência tem declive

$$m_{CA} = \frac{1-0}{0-1} = \frac{1}{-1} = -1$$



Como a reta r é tangente à circunferência no ponto A, é perpendicular à reta CA, e por isso, o seu declive é o simétrico do inverso de m_{CA}, temos que,

$$m_r = -\frac{1}{m_{CA}} = -\frac{1}{-1} = 1$$

Assim, temos que a equação reduzida da reta r é da forma $y = 1 \times x + b \Leftrightarrow y = x + b$

Como o ponto A pertence à reta r, substituindo as suas coordenadas na expressão anterior, vem $0 = 1 + b \Leftrightarrow -1 = b$

Pelo que, a equação reduzida da reta r é

$$y = x - 1$$

Resposta: **Opção B**

8. Analisando cada uma das expressões temos:

- Se $u_n = (-1)^n$, então $u_1 = (-1)^1 = -1$; $u_2 = (-1)^2 = 1$ e $u_3 = (-1)^3 = -1$
  Como $u_2 > u_1$ mas $u_3 < u_2$ a sucessão não é monótona.
- Se $u_n = (-1)^n.n$, então $u_1 = (-1)^1 \times 1 = -1$; $u_2 = (-1)^2 \times 2 = 2$ e $u_3 = (-1)^3 \times 3 = -3$
  Da mesma forma, temos que, como $u_2 > u_1$ mas $u_3 < u_2$ a sucessão não é monótona.
- Se $u_n = -\frac{1}{n}$, como $u_{n+1} = -\frac{1}{n+1}$, vem que

  $$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n+1} - \left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = -\frac{n}{n(n+1)} + \frac{n+1}{n(n+1)} = \frac{-n+n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

  Ou seja, $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ (porque como $n > 0$, então $n(n+1) > 0$ e também $\frac{1}{n(n+1)}$), ou seja u_n é uma sucessão **monótona** crescente.

  Temos ainda que, como u_n é monótona crescente, $u_n > u_1, \forall n > 1$ e que $u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$ (porque como $\frac{1}{n} > 0, n \in \mathbb{N}$ então $-\frac{1}{n} < 0, n \in \mathbb{N}$), pelo que $-1 \leq u_n < 0$, ou seja u_n **é limitada**.
- Se $u_n = 1 + n^2$, então u_n é um infinitamente grande positivo, ou seja, $\forall \delta \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{N} : u_k > \delta$, ou seja a sucessão não é limitada.

Resposta: **Opção C**

GRUPO II

1. Escrevendo $-1+i$ na f.t. temos $-1+i = \rho \operatorname{cis}\theta$, onde:

   - $\rho = |-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
   - $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{-1} = -1$; como $\operatorname{sen}\theta > 0$ e $\cos\theta < 0$, θ é um ângulo do 2º quadrante, logo $\theta = -\frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

   E assim $-1+i = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}$

   Simplificando a expressão de z_1 temos:

$$z_1 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}}{\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{12}\right) = 1\operatorname{cis}\left(\frac{9\pi}{12} - \frac{\pi}{12}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{8\pi}{12}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

   Como se $w = \rho\operatorname{cis}\theta$ então $\overline{w} = \rho\operatorname{cis}(-\theta)$, então

$$\overline{z_1} = \operatorname{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$

   E assim, usando a fórmula de Moivre, temos que:

$$z^4 = \overline{z_1} \Leftrightarrow z^4 = \operatorname{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{\operatorname{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{1}\operatorname{cis}\left(\frac{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}\right), k \in \{0,1,2,3\}$$

   Ou seja, temos 4 soluções da equação:

   - $k=0 \rightarrow w_1 = \sqrt[4]{1}\operatorname{cis}\left(\frac{-\frac{2\pi}{3}+0}{4}\right) = \operatorname{cis}\left(-\frac{2\pi}{12}\right) = \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
   - $k=1 \rightarrow w_2 = \sqrt[4]{1}\operatorname{cis}\left(\frac{-\frac{2\pi}{3}+2\pi}{4}\right) = \operatorname{cis}\left(-\frac{2\pi}{12}+\frac{2\pi}{4}\right) = \operatorname{cis}\left(-\frac{2\pi}{12}+\frac{6\pi}{12}\right) = \operatorname{cis}\frac{4\pi}{12} = \operatorname{cis}\frac{\pi}{3}$
   - $k=2 \rightarrow w_3 = \sqrt[4]{1}\operatorname{cis}\left(\frac{-\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4}\right) = \operatorname{cis}\left(-\frac{2\pi}{12}+\frac{4\pi}{4}\right) = \operatorname{cis}\left(-\frac{2\pi}{12}+\frac{12\pi}{12}\right) = \operatorname{cis}\frac{10\pi}{12} = \operatorname{cis}\frac{5\pi}{6}$
   - $k=3 \rightarrow w_4 = \sqrt[4]{1}\operatorname{cis}\left(\frac{-\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4}\right) = \operatorname{cis}\left(-\frac{2\pi}{12}+\frac{6\pi}{4}\right) = \operatorname{cis}\left(-\frac{2\pi}{12}+\frac{18\pi}{12}\right) = \operatorname{cis}\frac{16\pi}{12} = \operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}$

2.

2.1. Como no instante em que se iniciou a contagem do tempo, o ponto P coincidia com o ponto A, a distância inicial ($t = 0$), em metros, do ponto A ao ponto O é dada por $d(0)$

Assim, os instantes em que o ponto P passou pelo ponto A, nos primeiros três segundos do movimento, são as soluções da equação $d(t) = d(0)$, com $t \in]0{,}3]$

$$d(t) = d(0) \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\pi \times 0 + \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \pi t + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \pi t + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi t = 2k\pi \vee \pi t = \pi - 2 \times \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 2k \vee \pi t = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 2k \vee \pi t = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 2k \vee t = \frac{2}{3} + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

Como $t \in]0{,}3]$, atribuindo valores inteiros a k para identificar as soluções no intervalo definido, temos

- $k = 0 \rightarrow t = 0 \vee t = \frac{2}{3}$ $(0 \notin]0{,}3])$
- $k = 1 \rightarrow t = 2 \vee t = \frac{2}{3} + 2 \Leftrightarrow t = 2 \vee t = \frac{8}{3}$
- $k = 2 \rightarrow t = 4 \vee t = \frac{2}{3} + 4 \Leftrightarrow t = 4 \vee t = \frac{14}{3}$ $(4 \notin]0{,}3] \wedge \frac{14}{3} \notin]0{,}3])$

Assim temos, durante os primeiros três segundos do movimento, o ponto P passou pelo ponto A por três vezes, nos instantes $t_1 = \frac{2}{3}$ s, $t_2 = 2$ s e $t_3 = \frac{8}{3}$ s.

2.2.

Como a função d resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $[0, +\infty[$, é uma função contínua, e, por isso, também é contínua em $[3, 4]$.

Como $0{,}75 < 1{,}1 < 1{,}25$, ou seja, $d(3) < 1{,}1 < d(4)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $t_0 \in]3, 4[$ tal que $d(t_0) = 1{,}1$, ou seja, que houve, pelo menos, um instante, entre os três segundos e os quatro segundos após o início da contagem do tempo, em que a distância do ponto P ao ponto O foi igual a 1,1 metros.

C.A.

$$d(3) = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(3\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) =$$
$$= 1 + \frac{1}{2} \times \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 1 + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) =$$
$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$d(4) = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) =$$
$$= 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

3.

3.1. Averiguando a existência de uma assíntota horizontal quando $x \to -\infty$, vem

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (1 + xe^x) = \lim_{x\to-+\infty} 1 + \lim_{x\to-\infty} (xe^x) = 1 + (-\infty \times e^{-\infty}) = 1 + \underbrace{(-\infty \times 0^+)}_{\text{Indeterminação}}$$

(fazendo $y = -x$, temos $x = -y$; e se $x \to -\infty$, então $y \to +\infty$)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1 + \lim_{x\to-\infty} (xe^x) = 1 + \lim_{y\to+\infty} (-ye^{-y}) = 1 + \lim_{y\to+\infty} \left(-y \times \frac{1}{e^y}\right) = 1 - \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{y}{e^y}\right) =$$

$$= 1 - \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^y}{y}}\right) = 1 - \frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = 1 - \frac{1}{+\infty} = 1 - 0 = 1$$

Logo, como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$, podemos concluir que a reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal do gráfico de f

Averiguando agora a existência de uma assíntota horizontal quando $x \to +\infty$, vem

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (\ln(x-3) - \ln x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\ln \frac{x-3}{x}\right) = \ln \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x-3}{x}\right) =$$

$$= \ln \left(\frac{\lim\limits_{x\to+\infty} (x-3)}{\lim\limits_{x\to+\infty} x}\right) = \ln \left(\frac{\lim\limits_{x\to+\infty} (x)}{\lim\limits_{x\to+\infty} x}\right) = \ln \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x}\right) = \ln(1) = 0$$

Logo, como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, podemos concluir que a reta de equação $y = 0$ também é assíntota horizontal do gráfico de f

3.2. Para $x \in]-\infty,3]$, $f(x) = 1 + xe^x$, logo, vem que

$$f(x) - 2x > 1 \Leftrightarrow 1 + xe^x - 2x > 1 \Leftrightarrow xe^x - 2x > 0 \Leftrightarrow x(e^x - 2) > 0$$

Determinando as soluções da equação $x(e^x - 2) = 0$, temos:

$$x(e^x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor e^x = 2 \Leftrightarrow x = 0 \lor x = \ln 2$$

Estudando a variação do sinal de $x(e^x - 2)$, em $]-\infty,3]$, vem:

x	$-\infty$	0		$\ln 2$		3
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$e^x - 2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x(e^x - 2)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

Assim, como $f(x) - 2x > 1 \Leftrightarrow x(e^x - 2) > 0$, temos que o conjunto solução de $f(x) - 2x > 1$ é

$$C.S. =]-\infty,0[\cup]\ln 2,3]$$

3.3. Para calcular o declive da reta tangente, no ponto de abcissa 4 começamos por determinar a expressão da derivada da função, para $x > 3$:

$$f'(x) = \big(\ln(x-3) - \ln x\big)' = \big(\ln(x-3)\big)' - \big(\ln x\big)' = \frac{(x-3)'}{x-3} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x}$$

Assim, temos que o declive da reta tangente no ponto de abcissa 4 é:

$$m = f'(4) = \frac{1}{4-3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Logo a equação da reta tangente é da forma $y = \frac{3}{4}x + b$

Como $f(4) = \ln(4-3) - \ln 4 = \ln 1 - \ln 4 = 0 - \ln 4 = -\ln 4$, sabemos que o ponto $P(4, -\ln 4)$ pertence ao gráfico da função e também à reta tangente.
Assim, substituindo as coordenadas do ponto de tangência na equação da reta, podemos calcular o valor de b:

$$-\ln 4 = \frac{3}{4} \times 4 + b \Leftrightarrow -\ln 4 = 3 + b \Leftrightarrow -\ln 4 - 3 = b$$

Pelo que a equação da reta tangente é:

$$y = \frac{3}{4}x - \ln 4 - 3$$

4. O gráfico **A**, não é o gráfico da função f, porque tem um ponto em que a função não é contínua, logo, nesse ponto, a função não tem derivada e sabemos que f tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio.

   O gráfico **B**, não é o gráfico da função f, porque tem a concavidade voltada para cima para alguns valores de $x \in]-\infty,0[$, ou seja, a segunda derivada é positiva para alguns valores de $x \in]-\infty,0[$, e sabemos que $f''(x) < 0$, para qualquer $x \in]-\infty,0[$

   O gráfico **C**, não é o gráfico da função f, porque a reta tangente no ponto de abcissa zero tem declive negativo (a função é decrescente numa vizinhança de zero), ou seja a primeira derivada é negativa em $x = 0$, e sabemos que $f'(0) > 0$

5. Temos que:

$$\begin{aligned}
P\left(A\cup\overline{B}\right)-1+P(B) &= P(A)+P\left(\overline{B}\right)-P\left(A\cap\overline{B}\right)-1+P(B) && (1)\\
&= P(A)-P\left(A\cap\overline{B}\right)-1+P(B)+P\left(\overline{B}\right) &&\\
&= P(A)-P\left(A\cap\overline{B}\right)-1+1 && (2)\\
&= P(A)-P\left(A\cap\overline{B}\right) &&\\
&= P(A)-\Big(P(A)-P(A\cap B)\Big) && (3)\\
&= P(A)-P(A)+P(A\cap B) &&\\
&= P(A\cap B) &&\\
&= P(A\cap B)\times\frac{P(A)}{P(A)} && (4)\\
&= P(A)\times\frac{P(A\cap B)}{P(A)} &&\\
&= P(A)\times P(B|A) && (5)
\end{aligned}$$

(1) Teorema: $P\left(X\cup Y\right)=P(X)+P(Y)-P(X\cap Y)$
(2) Teorema: $P(X)+P\left(\overline{X}\right)=1$
(3) Teorema: $P\left(X\cap\overline{Y}\right)=P(X)-P(X\cap Y)$
(4) Hipótese: $P(A)\neq 0$
(5) Definição: $P(X|Y)=\dfrac{P(X\cap Y)}{P(Y)}$

Logo, $P\left(A\cup\overline{B}\right)-1+P(B)=P(A)\times P(B|A)$ *q.e.d.*

6.

6.1. Como a pirâmide que integra o sólido é regular, a projeção ortogonal do vértice V no plano da base coincide com o centro geométrico da base, V pertence ao plano de equação $x=1$ e $y=1$, ou seja tem de coordendas $(1{,}1{,}k), k\in\mathbb{R}$

Como o ponto V também pertence ao plano de equação $6x+z-12=0$, podemos calcular a cota do ponto fazendo a substituição $x=1$, na equação deste plano:

$$6(1)+z-12=0\ \Leftrightarrow\ 6+z=12\ \Leftrightarrow\ z=12-6\Leftrightarrow\ z=6$$

Assim, temos temos que as coordenadas do ponto V são $(1{,}1{,}6)$

6.2. Como se pretende escrever uma equação de um plano perpendicular à reta OR, o vetor $\overrightarrow{OR}$ é um vetor normal do plano. Como O é a origem do referencial, as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OR}$, coincidem com as do ponto R, ou seja

$$\overrightarrow{OR}=(2{,}2{,}2)$$

Assim, temos que a equação do plano pretendido pode ser da forma $2x+2y+2z+d=0$
Como o ponto P pertence ao eixo Ox e o cubo tem aresta 2, temos que as suas coordenadas são $P(2{,}0{,}0)$.
Para determinar o valor de d, na equação do anterior, substituímos as coordenadas do ponto P, porque as estas verificam a equação do plano, porque o ponto pertence ao plano:

$$2(2)+2(0)+2(0)+d=0\ \Leftrightarrow\ 4+0+0+d=0\ \Leftrightarrow\ d=-4$$

Pelo que, uma equação cartesiana do plano que passa no ponto P e é perpendicular à reta OR é

$$2x+2y+2z-4=0$$

Ou, simplificando, $x+y+z-2=0$

6.3. Como o plano QRS é o plano de equação $y = 2$, as coordenadas dos pontos deste plano, em particular o ponto A, tem de coordenadas $A(a,2,c), a \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$

Como a cota do ponto A é o cubo da abcissa ($c = a^3$), temos que as coordenadas do ponto são $A(a,2,a^3), a \in \mathbb{R}$.
Como O é a origem do referencial, as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OA}$, coincidem com as do ponto A, ou seja

$$\overrightarrow{OA} = (a,2,a^3), a \in \mathbb{R}$$

Calculando as coordenadas do vetor $\overrightarrow{TQ}$, recorrendo às coordenadas dos pontos $T(0,0,2)$ e $Q(2,2,0)$, temos que

$$\overrightarrow{TQ} = Q - T = (2,2,0) - (0,0,2) = (2,2,-2)$$

Como os vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{TQ}$ são perpendiculares, o seu produto escalar é nulo:

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{TQ} = 0 \Leftrightarrow (a,2,a^3).(2,2,-2) = 0 \Leftrightarrow$$

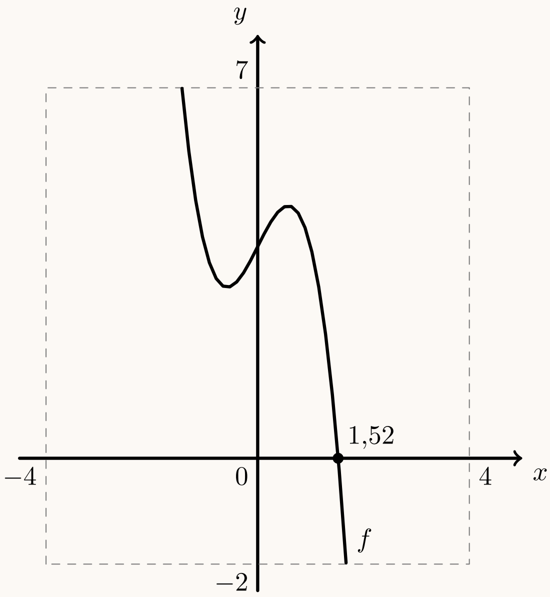
$$\Leftrightarrow 2a + 2 \times 2 - 2a^3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2a^3 + 2a + 4 = 0, a \in \mathbb{R}$$

Desta forma, visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função $f(x) = -2x^3 + 2x + 4$, na janela de visualização sugerida, (reproduzido na figura ao lado), podemos observar o zero da função.

Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados dos zeros de uma função, obtemos um valor aproximado da solução da equação, ou seja, a abcissa do ponto A, cujo valor numérico, aproximado às centésimas, é

$$a \approx 1{,}52$$



6.4. Determinando a probabilidade com recurso à Regra de LaPlace, calculamos o quociente do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis, sendo os casos possíveis equiprováveis.

Para calcular o número de casos possíveis, verificamos que existem 7 cores (elementos) para distribuir por 9 faces (posições), pelo que a ocorrência de repetições é necessária e a ordem é relevante porque as faces não são todas iguais. Ou seja, o número de casos possíveis corresponde a ${}^7A'_9 = 7^9$

O número de casos favoráveis pode ser calculado considerando o número de escolhas diferentes de 2 das 4 faces triangulares (para serem coloridas de branco) - ${}^4C_2$; depois o número de escolhas diferentes de 2 das 5 faces quadradas (para serem coloridas de azul) - ${}^5C_2$; e finalmente a distribuição das restantes 5 cores pelas restantes 5 faces (para serem coloridas uma de cada cor) -${}^5A_5 = P_5 = 5!$
Logo o número de casos favoráveis é ${}^4C_2 \times {}^5C_2 \times 5!$ Assim, calculando a probabilidade com recurso à Regra de Laplace, e apresentando o resultado na forma de dízima, arredondado às décimas de milésima, temos

$$p = \frac{{}^4C_2 \times {}^5C_2 \times 5!}{7^9} \approx 0{,}000\,2$$