Exame final nacional de Matemática A **(2014, Época especial)**

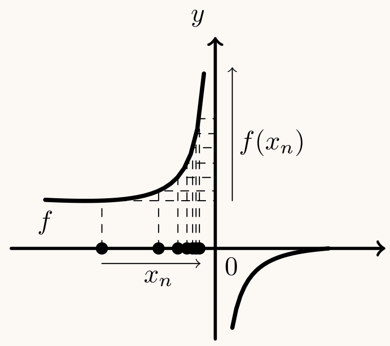
Proposta de resolução

GRUPO I

1. Para que os números de cinco algarismos sejam ímpares e tenham 4 algarismo pares, todos os números devem ser pares à exceção do último. Assim, existem 4 hipóteses para selecionar o primeiro algarismo, das dezenas de milhar (nomeadamente 2, 4, 6, e 8, ficando garantido que o número é superior a 20 000), 5 hipóteses para a escolha do segundo algarismo (os anteriores e o zero), tal como para os terceiro e quarto algarismos; e também 5 hipóteses para o quinto algarismo, o das unidades (nomeadamente 1, 3, 5, 7 e 9, ficando garantido que o número é ímpar).
   Assim a quantidade de números ímpares com cinco algarismos que têm quatro algarismos pares e são superiores a 20 000 é:
   $$4 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 4 \times 5^4$$
   Resposta: **Opção D**

2. A linha do triângulo de Pascal em que a soma dos dois primeiros elementos com os dois últimos elementos é igual a 20, como o primeiro e o último números são 1, a soma do segundo com o penúltimo é 18, sendo estes iguais entre si, e por isso iguais a $\frac{18}{2} = 9$.
   Na linha do triângulo de Pascal em que o segundo elemento é 9, os elementos são da forma ${}^9C_k$, pelo que, recorrendo à calculadora, podemos verificar a composição da linha:
   $$1 \;\; 9 \;\; 36 \;\; 84 \;\; 126 \;\; 126 \;\; 84 \;\; 36 \;\; 9 \;\; 1$$
   Assim, escolhendo, ao acaso, um elemento desta linha, a probabilidade de ele ser par é $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$
   Resposta: **Opção C**

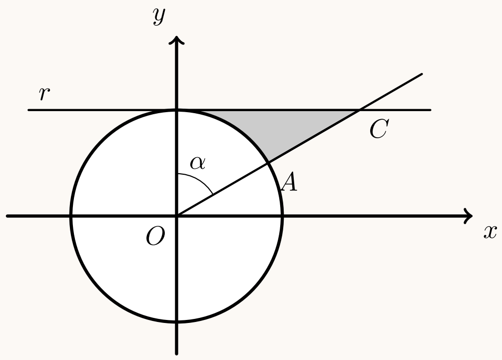
3. Como $\lim x_n = \lim\left(-\frac{1}{n}\right) = 0^-$, então:
   $$\lim f(x_n) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{0-1}{e^{0^-}-1} = \frac{-1}{1^- - 1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$
   Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de (x_n) como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $f(x_n)$, que tendem para $+\infty$, quando o valor de n aumenta.

   Resposta: **Opção D**

4. O triângulo $[OBC]$ é retângulo em B, $\overline{OB} = 1$, e $[BC]$ é o cateto oposto ao ângulo α, temos que:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{BC}}{1} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \overline{BC}$$



Logo, vem que:

$$A_{[OBC]} = \frac{\overline{OB} \times \overline{BC}}{2} = \frac{1 \times \operatorname{tg}\alpha}{2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}$$

A área do setor circular de centro O, raio 1 e amplitude α (delimitado pelo arco AB) é:

$$A = \frac{\alpha \times 1^2}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

Como a área da zona sombreada (A_S) pode ser calculada como a diferença entre as áreas do triângulo $[OBC]$ e o setor circular de centro O e delimitado pelo arco AB, temos que:

$$A_S = A_{[OBC]} - A = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \alpha}{2}$$

Resposta: **Opção B**

5. Para que o gráfico de uma função tenha exatamente dois pontos de inflexão, a segunda derivada deve ter exatamente dois zeros, associados a uma mudança de sinal.
Nas opções (B) e (C) existem 4 e 3 zeros associados a uma mudança de sinal, respetivamente, ou seja, se cada um destes for o gráfico da segunda derivada, o gráfico da função associada terá, respetivamente quatro e três pontos de inflexão.
Na opção (D) existem 2 zeros, mas só um deles está associado a uma mudança de sinal, ou seja, se este for o gráfico da segunda derivada, o gráfico da função associada terá um único ponto de inflexão.
Na opção (A) existem 2 zeros, ambos associados a uma mudança de sinal, pelo que podemos concluir que este é o gráfico da segunda derivada, em que o gráfico da função associada terá exatamente dois pontos de inflexão.

Resposta: **Opção A**

6. Como a reta de equação $y = 2x - 5$ é assíntota do gráfico de f e $D_f = \mathbb{R}^+$, sabemos que:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$$

Assim, vem que:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{6x-1}{f(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{6x-1}{x}}{\frac{f(x)}{x}} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{6x-1}{x}}{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{6x}{x} - \frac{1}{x}\right)}{2} = \frac{6-0}{2} = 3$$

Resposta: **Opção C**

7. Como a reta r é perpendicular ao plano α, o vetor diretor da reta e o vetor normal do plano são colineares.
Assim, qualquer vetor diretor da reta r tem que ser colinear com o vetor $\vec{u} = (1, -1, -2)$
Analisando as condições que definem cada uma das retas, nomeadamente os vetores diretores, temos:

   - A reta definida pela condição da opção (A), que pode ser escrita como $\frac{x-2}{1} = \frac{z+1}{1} \wedge y = 0$, com o objetivo de evidenciar as coordenadas do vetor diretor, que é $\overrightarrow{u_A} = (1,0,1)$ e que não é colinear com o vetor normal do plano α
   - A reta definida pela condição da opção (B), que pode ser escrita como $\frac{x-5}{-1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z+3}{2}$, com o objetivo de evidenciar as coordenadas do vetor diretor, que é $\overrightarrow{u_B} = (-1,1,2)$ e que é colinear com o vetor normal do plano α, porque $\overrightarrow{u_B} = -\vec{u}$
   - A reta definida pela condição da opção (C), que evidencia as coordenadas do vetor diretor, que é $\overrightarrow{u_C} = (2,3,0)$ e não é colinear com o vetor normal do plano α
   - A reta definida pela condição da opção (D), que pode ser escrita como $\frac{x-2}{1} = \frac{y+0}{-1} = \frac{z-3}{1}$, com o objetivo de evidenciar as coordenadas do vetor diretor, que é $\overrightarrow{u_D} = (1, -1,1)$ e que não é colinear com o vetor normal do plano α

   Assim, a reta definida pela condição (B) é a única perpendicular ao plano α e contém o ponto $A(2,0,3)$, e se substituirmos as coordenadas do ponto na condição obtemos uma proposição verdadeira:

$$-2+5 = 0+3 = \frac{3+3}{2} \Leftrightarrow 3 = 3 = 3$$

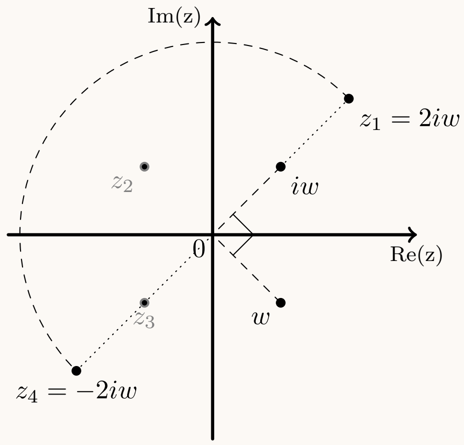
   Resposta: **Opção B**

8. A operação "*multiplicar por i*"corresponde a "fazer uma rotação de centro em O e amplitude $\frac{\pi}{2}$ radianos", pelo que a imagem geométrica de iw está no primeiro quadrante a igual distância da origem do que a imagem geométrica de w

   A operação "*multiplicar por* 2"corresponde a "fazer duplicar a distância à origem, mantendo o argumento do número complexo", pelo que $2iw = z_1$

   Finalmente, a imagem geométrica de um número complexo, e do seu simétrico correspondem a rotações de centro em O e amplitude π radianos, pelo que $-2iw = z_4$

   Resposta: **Opção D**



GRUPO II

1.

1.1. Simplificando a expressão de z_1 vem:

$$z_1 = \frac{1-i}{2i} - i^{-1} = \frac{1-i}{2i} - \frac{1}{i} = \frac{1-i}{2i} - \frac{2}{2i} = \frac{1-i-2}{2i} = \frac{-1-i}{2i} = \frac{(-1-i)i}{(2i)i} =$$

$$= \frac{-i-i^2}{2i^2} = \frac{-i-(-1)}{2(-1)} = \frac{-i+1}{-2} = \frac{i-1}{2} = \frac{-1+i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

Escrevendo z_1 na f.t., temos que $z_1 = \rho \operatorname{cis} \theta$, onde:

- $\rho = \left|-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1$; como $\operatorname{sen} \theta > 0$ e $\cos \theta < 0$, θ é um ângulo do 2º quadrante,

  logo $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

Logo $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$
E assim, pela fórmula de Moivre para a potenciação

$$(z_1)^4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}\right)^4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 \operatorname{cis} \left(4 \times \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{(\sqrt{2})^4}{2^4} \operatorname{cis}(3\pi) = \frac{4}{16} \operatorname{cis}(3\pi) = \frac{1}{4} \operatorname{cis} \pi$$

Como $\overline{z_2} = \overline{\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \operatorname{cis}\left(-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$, fazendo o produto na f.t., vem:

$$(z_1)^4 \times \overline{z_2} = \left(\frac{1}{4} \operatorname{cis} \pi\right) \times \left(\operatorname{cis} \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{4} \times 1\right) \operatorname{cis}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

Como $\arg\left((z_1)^4 \times \overline{z_2}\right)$ é da forma $\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a imagem geométrica de $(z_1)^4 \times \overline{z_2}$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

1.2. Como $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$, $\operatorname{sen} \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ e $\cos \alpha = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ vem que

$$w = \operatorname{sen}(2\alpha) + 2i \cos^2 \alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + 2i \cos^2 \alpha = 2 \cos \alpha \left(\operatorname{sen} \alpha + i \cos \alpha\right) =$$

$$= 2 \cos \alpha \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = 2 \cos \alpha \left(\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)$$

Como $\cos \alpha > 0$, porque $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, a f.t. do número complexo w é $w = 2 \cos \alpha \left(\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)$, em que $|w| = 2 \cos \alpha$

2.

2.1. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um aluno nesta turma, e os acontecimentos:
R:≪O aluno ser rapariga≫
D:≪O aluno está inscrito no desporto escolar≫
Temos que $P\left(\overline{R}\right) = 0{,}6$; $P(D) = 0{,}8$ e $P\left(\overline{D}|\overline{R}\right) = 0{,}2$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P(R) = 1 - P\left(\overline{R}\right) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$
- $P\left(\overline{D}\right) = 1 - P(D) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$
- $P\left(\overline{D} \cap \overline{R}\right) = P\left(\overline{R}\right) \times P\left(\overline{D}|\overline{R}\right) = 0{,}6 \times 0{,}2 = 0{,}12$
- $P\left(R \cap \overline{D}\right) = P\left(\overline{D}\right) - P\left(\overline{D} \cap \overline{R}\right) = 0{,}2 - 0{,}12 = 0{,}08$
- $P\left(R \cap D\right) = P(R) - P\left(R \cap \overline{D}\right) = 0{,}4 - 0{,}08 = 0{,}32$

	R	$\overline{R}$	
D	0,32		0,8
$\overline{D}$	0,08	0,12	0,2
	0,4	0,6	1

Assim, calculando a probabilidade de um aluno dessa turma, escolhido ao acaso, ser rapariga, sabendo que está inscrito no desporto escolar e, escrevendo o resultado na forma de fração irredutível, temos:

$$P\left(R|D\right) = \frac{P(R \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}32}{0{,}8} = \frac{2}{5}$$

2.2. Recorrendo à Regra de LaPlace para determinar a probabilidade, o número de casos possíveis é o número de grupos que podemos formar com 3 alunos escolhidos de entre os 25, como a ordem é irrelevante, corresponde a ${}^{25}C_3$

Como a turma tem 25 alunos, e 80% estão inscritos no desporto escolar, o número de inscritos é de $25 \times 0{,}8 = 20$
Para determinar o número de casos favoráveis, ou seja, o número de grupos em que, pelo menos, 2 alunos (dos 3) estão inscritos no desporto escolar, calculamos a soma do número de grupos relativos a duas situações distintas

- todos (os 3) estão inscritos no desporto escolar, o que corresponde a selecionar 3 de entre os 20 inscritos (sem considerar relevante a ordenação), ou seja ${}^{20}C_3$
- exatamente 2 (dos 3) estão inscritos no desporto escolar e o outro aluno não, que corresponde a selecionar 2 alunos do conjunto dos 20 inscritos e 1 dos 5 não inscritos, ou seja ${}^{20}C_2 \times 5$

Assim, calculando a probabilidade de serem escolhidos, pelo menos, dois alunos que estão inscritos no desporto escolar, e arredondando o resultado às centésimas, temos

$$\frac{{}^{20}C_3 + {}^{20}C_2 \times 5}{{}^{25}C_3} \approx 0{,}91$$

3. Como A e $\overline{A}$ são acontecimentos equiprováveis, temos que $P(A) = P\left(\overline{A}\right)$
Como $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right)$ vem que

$$P(A) = 1 - P(A) \Leftrightarrow P(A) + P(A) = 1 \Leftrightarrow 2P(A) = 1 \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{2}$$

Como A e B são acontecimentos independentes, temos que:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Assim, vem que:

$$\begin{array}{rl|l}
2P(A \cup B) = & 2\Big(P(A) + P(B) - P(A \cap B)\Big) & \text{Teorema: } P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y) \\
= & 2P(A) + 2P(B) - 2P(A \cap B) & \\
= & 2P(A) + 2P(B) - 2 \times P(A) \times P(B) & \text{Hipótese: } P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \\
= & 2 \times \frac{1}{2} + 2P(B) - 2 \times \frac{1}{2} \times P(B) & \text{Hipótese: } P(A) = \frac{1}{2} \\
= & 1 + 2P(B) - 1 \times P(B) & \\
= & 1 + P(B) &
\end{array}$$

Logo, se $P(A) = P\left(\overline{A}\right)$ e $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, então $2P(A \cup B) = 1 + P(B)$ *q.e.d.*

4. Recorrendo às equações da reta AD podemos determinar as coordenadas dos pontos A e D, substituindo, para cada um dos pontos, as coordenadas nulas:
   Assim, calculando as coordenadas do ponto D, como $x = 0$, vem:

$$\frac{0-3}{3} = -\frac{z}{5} \Leftrightarrow -1 = -\frac{z}{5} \Leftrightarrow 5 = z$$

   Ou seja, temos que $D(0,0,5)$
   Procedendo da mesma forma com o ponto A, como $z = 0$, vem:

$$\frac{x-3}{3} = -\frac{0}{5} \Leftrightarrow \frac{x-3}{3} = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

   Ou seja, temos que $A(3,0,0)$
   Assim, podemos como o ponto B e o ponto A têm a mesma abcissa, vem que $B(3,-3,0)$
   Para calcular a ordenada do ponto C vamos usar o Teorema de Pitágoras:

$$\left\|\overrightarrow{CD}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{OC}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{OD}\right\|^2 \Leftrightarrow 41 = \left\|\overrightarrow{OC}\right\|^2 + 5^2 \Leftrightarrow 41 - 25 = \left\|\overrightarrow{OC}\right\|^2 \Leftrightarrow 16 = \left\|\overrightarrow{OC}\right\|^2 \underset{\left\|\overrightarrow{OC}\right\| > 0}{\Leftrightarrow} 4 = \left\|\overrightarrow{OC}\right\|$$

   Logo temos que $C(0,-4,0)$

   Como conhecemos as coordenadas dos pontos B, C e D, vamos determinar as coordenadas de dois vetores, não colineares, do plano BCD:

$$\overrightarrow{CD} = D - C = (0,0,5) - (0,-4,0) = (0,4,5)$$

$$\overrightarrow{CB} = B - C = (3,-3,0) - (0,-4,0) = (3,1,0)$$

   Podemos agora determinar as coordenadas de um vetor perpendicular aos dois vetores do plano ($\vec{u} = (a,b,c)$), que é um vetor normal do plano BCD:

$$\begin{cases} (a,b,c).(0,4,5) = 0 \\ \\ (a,b,c).(3,1,0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4b + 5c = 0 \\ \\ 3a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -\dfrac{4b}{5} \\ \\ a = -\dfrac{b}{3} \end{cases}$$

   Assim temos que qualquer vetor normal ao plano que contém a face $[BCD]$ é da forma

$$\vec{u} = \left(-\frac{b}{3}, b, -\frac{4b}{5}\right), b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

   Ou seja, concretizando um valor para b, por exemplo, $b = 1$, vem $\vec{u} = \left(-\dfrac{1}{3}, 1, -\dfrac{4}{5}\right)$

5.

5.1. Para que a função seja contínua em $x=2$, temos que garantir que $f(2)=\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

Temos que

- $f(2)=2e^{2-2}=2e^0=2\times 1=2$
- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(xe^{x-2}\right)=2e^{2^- -2}=2e^{0^-}=2\times 1=2$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\frac{\operatorname{sen}(2-x)}{x^2+x-6}+k\right)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\frac{\operatorname{sen}(2-x)}{x^2+x-6}\right)+\lim\limits_{x\to 2^+} k=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\frac{\operatorname{sen}(2-x)}{x^2+x-6}\right)+\lim\limits_{x\to 2^+} k=$

$$=\frac{\operatorname{sen}(2-2^-)}{(2^-)^2+2^- -6}+k=\frac{0}{0}+k \text{ (indeterminação)}$$

(fazendo $y=x-2$, temos $x=y+2$ e $-y=2-x$; e se $x\to 2^+$, então $y\to 0^+$)

$$=\lim_{y\to 0^+}\left(\frac{\operatorname{sen}(-y)}{(y+2)^2+y+2-6}\right)+k=\lim_{y\to 0^+}\left(\frac{\operatorname{sen}(-y)}{y^2+4y+4+y-4}\right)+k=\lim_{y\to 0^+}\left(\frac{\operatorname{sen}(-y)}{y^2+5y}\right)+k=$$

$$=\lim_{y\to 0^+}\left(\frac{-\operatorname{sen} y}{y(y+5)}\right)+k=\lim_{y\to 0^+}\left(\frac{\operatorname{sen} y}{y}\times\frac{-1}{y+5}\right)+k=\underbrace{\lim_{y\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}\times\lim_{y\to 0^+}\frac{-1}{y+5}+k=$$

$$=1\times\frac{-1}{0^++5}+k=-\frac{1}{5}+k$$

Como se pretende que a função seja contínua em $x=2$, e verificámos que $f(2)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, podemos determinar o valor de k garantindo que $f(2)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

$$f(2)=\lim_{x\to 2^+} f(x) \Leftrightarrow 2=-\frac{1}{5}+k \Leftrightarrow 2+\frac{1}{5}=k \Leftrightarrow \frac{10}{5}+\frac{1}{5}=k \Leftrightarrow \frac{11}{5}=k$$

5.2. Como $D_f=]-\infty,e[$, se existir uma assíntota horizontal, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ é constante.

Assim, calculando o limite temos:

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(xe^{x-2}\right)=-\infty\times xe^{-\infty-2}=-\infty\times 0$ (indeterminação)

(Seja $y=-x$, temos que se $x\to -\infty$, então $y\to +\infty$)

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{y\to +\infty}\left(-ye^{-y-2}\right)=\lim_{y\to +\infty}\left(-y\times e^{-y}\times e^{-2}\right)=\lim_{y\to +\infty}\left(-y\times\frac{1}{e^y}\times e^{-2}\right)=$$

$$=\lim_{y\to +\infty}\left(-\frac{y}{e^y}\right)\times\lim_{y\to +\infty} e^{-2}=-\lim_{y\to +\infty}\frac{y}{e^y}\times e^{-2}=-e^{-2}\lim_{y\to +\infty}\frac{y}{e^y}=-e^{-2}\lim_{y\to +\infty}\left(\frac{1}{\frac{e^y}{y}}\right)=$$

$$=-e^{-2}\times\frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{y\to +\infty}\frac{e^y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}}=-e^{-2}\times\frac{1}{+\infty}=-e^{-2}\times 0=0$$

Logo, como $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$ e $D_f=]-\infty,e[$, podemos concluir que a única assíntota horizontal do gráfico de f é a reta de equação $y=0$

6.

6.1. Começamos por determinar a expressão da derivada da função g:

$$g'(x) = \left(\frac{1+\ln x}{x^2}\right)' = \frac{(1+\ln x)'(x^2) - (1+\ln x)(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{\left(0+\frac{x'}{x}\right)(x^2) - (1+\ln x)\times 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x}\times x^2 - 2x(1+\ln x)}{x^4} = \frac{\frac{x^2}{x} - 2x - 2x\ln x)}{x^4} \underset{x\neq 0}{=} \frac{x - 2x - 2x\ln x}{x^4} =$$

$$= \frac{-x - 2x\ln x}{x^4} = \frac{x(-1-2\ln x)}{x(x^3)} \underset{x\neq 0}{=} \frac{-1-2\ln x}{x^3}$$

Calculando os zeros da derivada, no domínio da função ($\mathbb{R}^+$), vem:

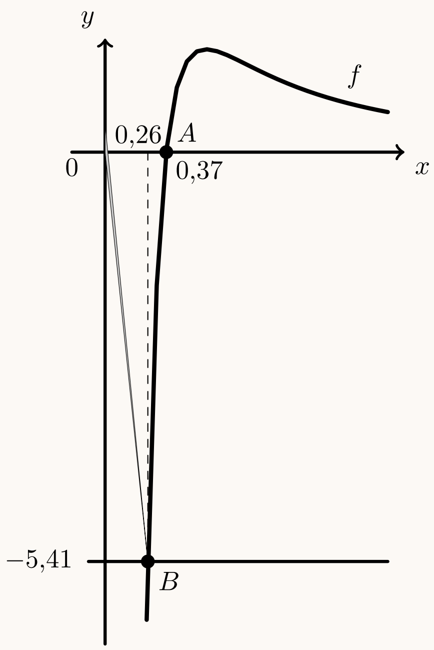
$$\frac{-1-2\ln x}{x^3} = 0 \Leftrightarrow -1-2\ln x = 0 \wedge \underbrace{x^3 \neq 0}_{\text{PV},x>0} \Leftrightarrow -2\ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$g'(x)$	n.d.	+	0	−
$g(x)$	n.d.	↗	Máx	↘

Assim, como g é crescente no intervalo $\left]0,e^{-\frac{1}{2}}\right]$ e decrescente no intervalo $\left[e^{-\frac{1}{2}},+\infty\right[$ podemos concluir que o único valor de x, para o qual a função g tem um extremo relativo, é $x = e^{-\frac{1}{2}}$ que é um maximizante da função.

6.2. Visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função g, numa janela coerente com o domínio da função, (reproduzido na figura ao lado) e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados dos zeros de uma função, obtemos um valor aproximado (às centésimas) da abcissa do ponto A, $x_A \approx 0{,}37$, que é também o comprimento do segmento $[OA]$ que podemos tomar como a base do triângulo $[OAB]$



Como sabemos que o ponto B está sobre uma reta que passa na origem e tem declive negativo, é um ponto do 4º quadrante, com abcissa menor que a abcissa do ponto A, e cuja distância ao eixo das abcissas, ou seja, a abcissa do ponto B é um valor de x tal que $|g(x)|$ é a medida da altura relativa à base $[OA]$, do triângulo $[OAB]$

Desta forma, como a área do triângulo é 1, procuramos um valor de x tal que

$$\frac{|g(x)|\times x_A}{2} = 1 \Rightarrow |g(x)| \approx \frac{2}{0{,}37} \Leftrightarrow |g(x)| \approx 5{,}41$$

Assim, como o ponto B tem ordenada negativa, traçamos também a reta $y = -5{,}41$, também reproduzida na figura anterior, e recorremos à função da calculadora para determinar valores aproximados (às centésimas) das coordenadas do ponto de interseção dos gráficos de duas funções para determinar a abcissa do ponto B, ou seja $x_B \approx 0{,}26$

Assim, para que a área do triângulo $[OAB]$ seja 1, as abcissas dos pontos A e B, com arredondamento às centésimas, são, respetivamente $x_A \approx 0{,}37$ e $x_B \approx 0{,}26$

7. A afirmação (I) é falsa. Como a reta de equação $x = 0$ é uma assíntota vertical do gráfico de f, a função não é contínua para $x = 0$, logo não é contínua no intervalo $[-3,5]$, pelo que não estão verificadas as condições de aplicação do Teorema de Bolzano.

   A afirmação (II) é falsa. Como $\lim\limits_{x \to -\infty} \big(f(x) - 2x\big) = 0$ podemos afirmar que a reta de equação $y = 2x + 0$ é uma assíntota do gráfico da função f, quando $x \to -\infty$. Assim, quando $x \to -\infty$ o gráfico de f tem uma assíntota que não é horizontal.

   A afirmação (III) é verdadeira. O $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ é a derivada de f. Como a derivada existe e é positiva em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, podemos afirmar que f é crescente em $]-\infty,0]$ e também em $[0,+\infty[$, o que permite confirmar a veracidade desta afirmação.