

Exame final nacional de Matemática A (2014, 2.ª fase)

Proposta de resolução



GRUPO I

1. Usando as leis de DeMorgan, e a probabilidade do acontecimento contrário, temos que:
 $P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$ então

$$P(\overline{A \cap B}) = 0,48 \Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = 0,48 \Leftrightarrow 1 - 0,48 = P(A \cup B) \Leftrightarrow 0,52 = P(A \cup B)$$

Como A e B são acontecimentos independentes, temos que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, logo

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \Leftrightarrow P(A) \times P(B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

Substituindo os valores das probabilidade, vem

$$\begin{aligned} 0,4 \times P(B) &= 0,4 + P(B) - 0,52 \Leftrightarrow 0,4 \times 0,52 - 0,4 = P(B) - 0,4 \times P(B) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0,12 &= P(B) \times (1 - 0,4) \Leftrightarrow 0,12 = P(B) \times 0,6 \Leftrightarrow \frac{0,12}{0,6} = P(B) \Leftrightarrow 0,2 = P(B) \end{aligned}$$

Resposta: **Opção C**

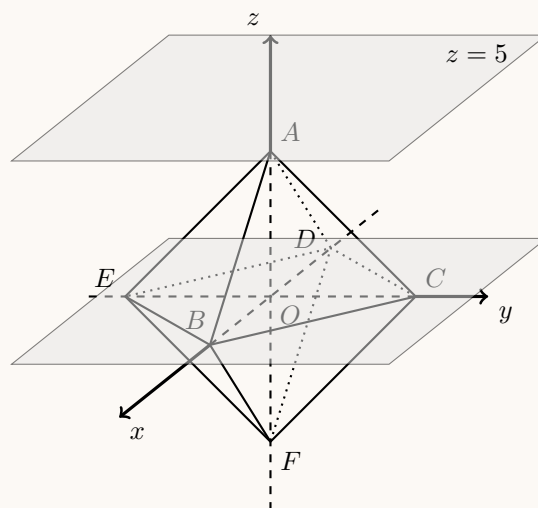
2. Um plano paralelo ao plano de equação $z = 5$, definido com 3 vértice do octaedro só pode ser o plano de equação $z = 0$, ou seja definido por 3 dos 4 pontos B, C, D ou E .

Assim, como para a definição do plano, é irrelevante a ordem dos pontos, existem 6C_3 planos distintos que podem ser definidos com 3 pontos quaisquer do octaedro; e ${}^4C_3 = 4$ planos definidos com 3 dos 4 vértices B, C, D ou E .

Assim, a probabilidade de escolher, ao acaso, três vértices do octaedro e esses três vértices definirem um plano paralelo ao plano de equação $z = 5$ é

$$\frac{{}^4C_3}{{}^6C_3} = \frac{4}{{}^6C_3}$$

Resposta: **Opção B**



3. Pela fórmula do binômio de Newton, sabemos que todos os termos do desenvolvimento de $\left(\frac{2}{x} + x\right)^{10}$ são da forma

$${}^{10}C_k \left(\frac{2}{x}\right)^{10-k} (x)^k = {}^{10}C_k \frac{2^{10-k}(x)^k}{x^{10-k}}, \quad k \in \{0,1,\dots,10\}$$

Ou seja, o termo que não depende da variável x é o termo em que $\frac{2^{10-k}(x)^k}{x^{10-k}} = 2^{10-k} \times \frac{(x)^k}{x^{10-k}} = 2^{10-k} \times 1$,

ou seja, em que, $k = 10 - k$

Assim, temos que, $k = 10 - k \Leftrightarrow 2k = 10 \Leftrightarrow k = 5$

Logo, no termo em causa $k = 5$, ou seja, é o termo

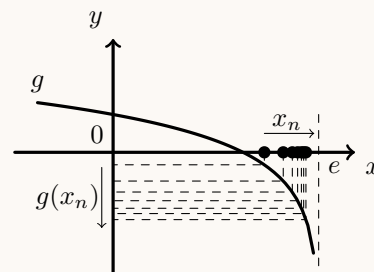
$${}^{10}C_5 \left(\frac{2}{5}\right)^{10-5} (x)^5 = {}^{10}C_5 \left(\frac{2}{5}\right)^5 (x)^5 = {}^{10}C_5 \frac{2^5 \times x^5}{x^5} = {}^{10}C_5 \times 2^5 = 8064$$

Resposta: **Opção B**

4. Como $\lim x_n = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^-$, então

$$\lim g(x_n) = \lim_{x \rightarrow e^-} g(x) = \ln(e - e^-) = \ln(0^+) = -\infty$$

Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de (x_n) como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $g(x_n)$, que tendem para $-\infty$, quando o valor de n aumenta.



Resposta: **Opção D**

5. Como a função é contínua no intervalo fechado, temos que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x)$

Temos que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = k - 3$

E calculando $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x)$, vem

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \left(\begin{array}{l} \text{Se } y = x - \frac{\pi}{2}, \text{ então } x = y + \frac{\pi}{2} \\ x \rightarrow \frac{\pi}{2}^- \Rightarrow y \rightarrow 0^- \end{array} \right)$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)}{y} = \left(\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = -\text{sen } y \right)$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{-\text{sen } y}{y} = - \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen } y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = -1$$




Assim, temos que

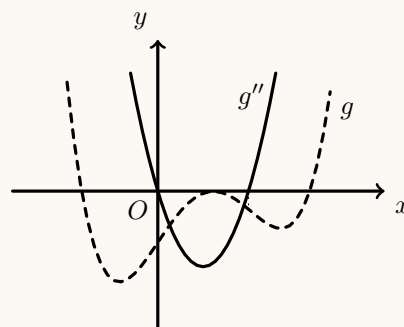
$$k - 3 = -1 \Leftrightarrow k = -1 + 3 \Leftrightarrow k = 2$$

Resposta: **Opção C**



6. Por observação do gráfico de g'' , podemos estudar o sinal da segunda derivada e relacionar com o sentido das concavidades do gráfico de g (designa-se por a , o zero de g'' maior que zero).

x		0		a	
$g''(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$		Pt. I.		Pt. I.	



O único gráfico compatível com o sentido das concavidades do gráfico identificadas é o gráfico da opção (A).

Resposta: **Opção A**

7. Os planos definidos pelas equações das opções (C) e (D) não contêm o ponto A , porque substituindo as coordenadas do ponto nas equações, obtemos proposições falsas:

$$(C) 2(1) - 3(0) + (3) = 0 \Leftrightarrow 2 - 0 + 3 = 0 \Leftrightarrow 5 = 0 \text{ e } (D) 3(1) + 2(0) = 0 \Leftrightarrow 3 + 0 = 0 \Leftrightarrow 3 = 0$$

O plano definido pela equação da opção (A) não é perpendicular ao plano α , porque os respetivos vetores normais $\vec{v}_\alpha = (3, 2, 0)$ e $\vec{v}_A = (3, 2, 0)$ são colineares, ou seja, os planos são paralelos e não perpendiculares.

O plano definido pela equação da opção (B) é perpendicular ao plano α , porque os respetivos vetores normais $\vec{v}_\alpha = (3, 2, 0)$ e $\vec{v}_B = (2, -3, -1)$ têm um produto escalar nulo, ou seja são perpendiculares, assim, como os planos:

$$\vec{v}_\alpha \cdot \vec{v}_B = (3, 2, 0) \cdot (2, -3, -1) = 3 \times 2 + 2(-3) + 0(-1) = 6 - 6 + 0 = 0$$

e este plano contém o ponto A , porque com a substituição das coordenadas deste ponto, obtemos uma proposição verdadeira:

$$2(1) - 3(0) - 3 + 1 = 0 \Leftrightarrow 2 - 0 - 3 + 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Resposta: **Opção B**

8. Os pontos da zona sombreada pertencem ao exterior da circunferência de centro na imagem geométrica do número complexo $2i$ e raio $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, ou seja, a distância à imagem geométrica de $2i$ é superior a $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, ou seja, os números complexos z verificam a condição $|z - 2i| > \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Como os pontos da região sombreada representam números complexos cujo argumento está compreendido entre $\arg\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 2i\right)$ e $\arg\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3} + 2i\right)$ vamos determinar estes argumentos.

$$\text{Seja } \theta_1 = \arg\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 2i\right), \text{ assim temos que } \operatorname{tg}(\theta_1) = \frac{2}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

Como θ_1 é um ângulo do 1º quadrante, temos que $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$

$$\text{Analogamente temos que } \theta_2 = \arg\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3} + 2i\right) = \frac{2\pi}{3}$$

E assim, os números complexos z verificam a condição anterior, e cumulativamente, a condição $\frac{\pi}{3} < \arg(z) < \frac{2\pi}{3}$

Resposta: **Opção C**



GRUPO II

1.

1.1. Escrevendo z na f.a. temos:

$$z = 2 \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{6} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} + i \times \frac{2}{2} = \sqrt{3} + i$$

Assim temos que

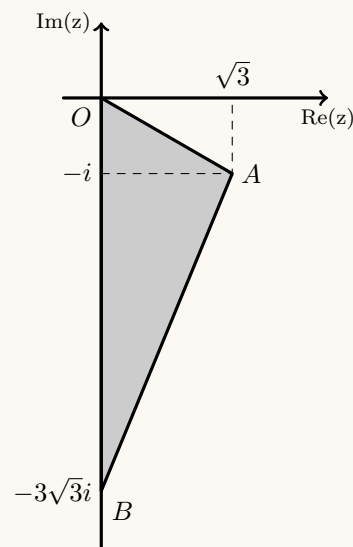
$$\bar{z} = \overline{\sqrt{3} + i} = \sqrt{3} - i$$

E, simplificando a expressão que define w , substituindo z , vem:

$$\begin{aligned} w &= \frac{(z-i)^4}{1+zi} = \frac{(\sqrt{3}+i-i)^4}{1+(\sqrt{3}+i)i} = \frac{(\sqrt{3})^4}{1+\sqrt{3}i+i^2} = \frac{3^2}{1+\sqrt{3}i-1} = \\ &= \frac{9}{\sqrt{3}i} = \frac{9 \times \sqrt{3} \times i}{(\sqrt{3})^2 i^2} = \frac{9\sqrt{3}i}{3 \times (-1)} = -3\sqrt{3}i \end{aligned}$$

Assim, podemos fazer a representação do triângulo $[AOB]$, como na figura ao lado.Por observação da figura, temos que a área do triângulo $[AOB]$ é

$$A_{[AOB]} = \frac{\operatorname{Re}(z) \times |\operatorname{Im}(w)|}{2} = \frac{\sqrt{3} \times 3\sqrt{3}}{2} = \frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2}$$

1.2. Considerando a equação na forma $az^2 + bz + c = 0$, com $a = 1$, $b = -2 \cos \alpha$ e $c = 1$, temos uma equação do segundo grau na variável z .

Assim,

$$\begin{aligned} z^2 - 2 \cos \alpha z + 1 &= 0 \Leftrightarrow z = \frac{-(-2 \cos \alpha) \pm \sqrt{(-2 \cos \alpha)^2 - 4(1)(1)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow z = \frac{2 \cos \alpha \pm \sqrt{4 \cos^2 \alpha - 4}}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z &= \frac{2 \cos \alpha \pm \sqrt{4(\cos^2 \alpha - 1)}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{2 \cos \alpha \pm \sqrt{-4(1 - \cos^2 \alpha)}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{2 \cos \alpha \pm \sqrt{-4(\operatorname{sen}^2 \alpha)}}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z &= \frac{2 \cos \alpha \pm (\sqrt{-4} \times \sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha})}{2} \Leftrightarrow z = \frac{2 \cos \alpha \pm (\sqrt{-1} \times \sqrt{4} \operatorname{sen} \alpha)}{2} \Leftrightarrow z = \frac{2 \cos \alpha \pm 2i \operatorname{sen} \alpha}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z &= \cos \alpha \pm i \operatorname{sen} \alpha \Leftrightarrow z = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha \vee z = \cos \alpha - i \operatorname{sen} \alpha \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z &= \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha \vee z = \cos(-\alpha) + i \operatorname{sen}(-\alpha) \Leftrightarrow z = \operatorname{cis} \alpha \vee z = \operatorname{cis}(-\alpha) \end{aligned}$$

Resposta: A equação tem duas soluções, que são, na f.t. em função de α : $\operatorname{cis} \alpha$ e $\operatorname{cis}(-\alpha)$ 

2.

2.1. Como existem 6 posições de colocação, temos 6C_2 colocações possíveis para as 2 bolas azuis (como as bolas da mesma cor são indistinguíveis, não se considera relevante a ordem).

Como se pretende que as 2 bolas azuis fiquem em ao lado uma da outra, apenas 5, das colocações anteriores são favoráveis, no sentido que verificam esta restrição (as posições 1-2,2-3,3-4,4-5 e 5-6). Assim, a probabilidade de as duas bolas azuis ficarem uma ao lado da outra, é

$$\frac{5}{{}^6C_2} = \frac{1}{3}$$

2.2. Como X é o número de bolas azuis retiradas da caixa, a variável X pode tomar os seguintes valores, com as respetivas probabilidades:

- $X = 0$, se todas as bolas forem pretas (como se retiram 3 bolas e existem 4 pretas, podem ser todas pretas)

$$P(X = 0) = \frac{{}^4C_3}{{}^6C_3} = \frac{1}{5}$$

- $X = 1$, se retirarmos 1 bola azul (de entre as 2 que existem) e 2 bolas pretas (de entre as 4 que existem)

$$P(X = 1) = \frac{{}^2C_1 \times {}^4C_2}{{}^6C_3} = \frac{3}{5}$$

- $X = 2$, se retirarmos as 2 bolas azuis e 1 das 4 pretas que existem

$$P(X = 2) = \frac{{}^2C_2 \times {}^4C_1}{{}^6C_3} = \frac{1}{5}$$

Logo a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

3. Como a soma dos ângulos externos de um polígono é 2π , o ângulo externo em A tem de amplitude $\frac{2\pi}{5}$ e assim, podemos calcular a amplitude do ângulo $B\hat{A}E$:

$$B\hat{A}E = \pi - \frac{2\pi}{5} = \frac{5\pi}{5} - \frac{2\pi}{5} = \frac{3\pi}{5}$$

Como $E\hat{A}D = E\hat{D}A$ (porque se opõem a lados iguais), $E\hat{A}D + E\hat{D}A + A\hat{E}D = \pi$ (porque são os ângulos internos de um triângulo) e $A\hat{E}D = B\hat{A}E$, temos que

$$E\hat{A}D + E\hat{A}D + \frac{3\pi}{5} = \pi \Leftrightarrow 2E\hat{A}D = \pi - \frac{3\pi}{5} \Leftrightarrow 2E\hat{A}D = \frac{2\pi}{5} \Leftrightarrow E\hat{A}D = \frac{2\pi}{2 \times 5} \Leftrightarrow E\hat{A}D = \frac{\pi}{5}$$

Como $B\hat{A}E = B\hat{A}D + E\hat{A}D \Leftrightarrow B\hat{A}D = B\hat{A}E - E\hat{A}D$ vem que

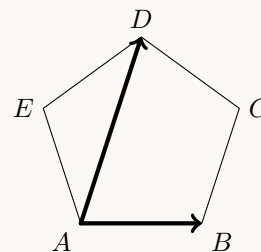
$$B\hat{A}D = \frac{3\pi}{5} - \frac{\pi}{5} = \frac{2\pi}{5}$$

Assim, vem que,

$$\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AD}}{\|\vec{AD}\|} = \frac{\|\vec{AB}\| \times \|\vec{AD}\| \times \cos(\vec{AB} \wedge \vec{AD})}{\|\vec{AD}\|} = \|\vec{AB}\| \times \cos(B\hat{A}D) \stackrel{\|\vec{AB}\|=1}{=} \cos(B\hat{A}D) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

Como $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ e $\sin^2(\alpha) + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ vem que

$$\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AD}}{\|\vec{AD}\|} = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$$



4.

- 4.1. Como a função f resulta de operações entre funções contínuas, é contínua no seu domínio, e como o seu domínio é $]-\infty, 0[$, então a única reta que pode ser assíntota vertical do gráfico de f é a reta de equação $x = 0$

Para averiguar se a reta de equação $x = 0$ é assíntota do gráfico de f , vamos calcular $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x - 1 + \frac{\ln(-x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x - \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(-x)}{x} = \\ &= 0 - 1 + \frac{\ln(0^-)}{0^-} = -1 + \frac{\ln(0^+)}{0^-} = -1 + \frac{-\infty}{0^-} = -1 + \infty = +\infty\end{aligned}$$

Assim, como $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$, concluímos que a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical do gráfico de f (e que não existe qualquer outra assíntota vertical).

Relativamente à existência de assíntotas não verticais, como o domínio de f é $]-\infty, 0[$, só poderão existir quando $x \rightarrow -\infty$. Assim, vamos averiguar a existência de uma assíntota de equação $y = mx + b$:

$$\begin{aligned}m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1 + \frac{\ln(-x)}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x} - \frac{1}{x} + \frac{\ln(-x)}{x^2} \right) = \\ &= 1 + 0 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{x^2} = 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{x^2} = 1 - 0 + \frac{+\infty}{+\infty} \quad (\text{Indeterminação})\end{aligned}$$

(fazendo $y = -x$, temos $x = -y$ e se $x \rightarrow -\infty$, então $y \rightarrow +\infty$)

$$\begin{aligned}m &= 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{x^2} = 1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(-(-y))}{(-y)^2} = 1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y^2} = 1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y} \times \frac{\ln(y)}{y} \right) = \\ &= 1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 1 + \frac{1}{+\infty} \times 0 = 1 + 0 \times 0 = 1\end{aligned}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 1 \times x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - 1 + \frac{\ln(-x)}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-1 + \frac{\ln(-x)}{x} \right) =$$

(fazendo $y = -x$, temos $x = -y$ e se $x \rightarrow -\infty$, então $y \rightarrow +\infty$)

$$b = -1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{x} = -1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(-(-y))}{-y} = -1 - \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = -1 - 0 = -1$$

Assim temos que a reta de equação $y = x - 1$ é uma assíntota do gráfico de f (e não existem outras assíntotas não verticais).

4.2.

Como a função f resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $]-\infty, 0[$, é uma função contínua, e, por isso, também é contínua em $[-e, -1]$.

Como $-4,09 < -e < -2$, ou seja, $f(-e) < -e < f(-1)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]-e, -1[$ tal que $f(c) = -e$, ou seja, que a equação $f(x) = -e$ tem, pelo menos, uma solução em $]-e, -1[$

C.A.

$$f(-e) = -e - 1 + \frac{\ln(-(-e))}{-e} = -e - 1 - \frac{\ln(e)}{e} \approx -4,09$$

$$f(-1) = -1 - 1 + \frac{\ln(-(-1))}{-1} = -2 - \ln(1) = -2 - 0 = -2$$

$$-e \approx -2,72$$



4.3. Começamos por determinar a expressão da derivada da função g , para $x < 0$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(-x + f(x)\right)' = \left(-x + x - 1 + \frac{\ln(-x)}{x}\right)' = \left(-1 + \frac{\ln(-x)}{x}\right)' = -(1)' + \left(\frac{\ln(-x)}{x}\right)' = \\ &= -0 + \frac{(\ln(-x))'x - \ln(-x)(x)'}{x^2} = \frac{(-x)' \times x - \ln(-x)(1)}{x^2} = \frac{-1 \times x - \ln(-x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(-x)}{x^2} \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada da função g , para $x < 0$:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln(-x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(-x) = 0 \wedge \underbrace{x^2 \neq 0}_{\text{P.V., pq } x < 0} \Leftrightarrow 1 = \ln(-x) \Leftrightarrow -x = e^1 \Leftrightarrow x = -e$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	$-\infty$	$-e$		0
$1 - \ln(-x)$		$-$	0	$+$
x^2		$+$	$+$	$+$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		\searrow	\min	\nearrow
				n.d.
				n.d.

Assim, podemos concluir que a função g :

- é decrescente no intervalo $] -\infty, -e]$;
- é crescente no intervalo $[-e, 0[$;
- tem um mínimo para $x = -e$



5. Como o lado $[PR]$ do triângulo $[PQR]$ é um diâmetro da circunferência e o vértice Q pertence à mesma circunferência, podemos garantir que o triângulo $[PQR]$ é retângulo, sendo $[PR]$ a hipotenusa. Como a circunferência tem raio 2, vem que $\overline{PR} = 2 \times 2 = 4$, e assim, recorrendo à definição de seno e cosseno temos:

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{\overline{QR}}{\overline{PR}} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\overline{QR}}{4} \Leftrightarrow \overline{QR} = 4 \sin \alpha \\ \cos \alpha &= \frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\overline{PQ}}{4} \Leftrightarrow \overline{PQ} = 4 \cos \alpha\end{aligned}$$

Como os lados $[QR]$ e $[PQ]$ são perpendiculares, temos que:

$$A_{[PQR]} = \frac{\overline{QR} \times \overline{PQ}}{2} = \frac{4 \sin \alpha \times 4 \cos \alpha}{2} = 8 \sin \alpha \cos \alpha$$

Como o triângulo $[PSR]$ é congruente com o triângulo $[PQR]$ (ambos têm 1 ângulo reto e dois lados iguais), vem que:

$$A(\alpha) = A_{[PQRS]} = A_{[PQR]} + A_{[PSR]} = 2 \times A_{[PQR]} = 2 \times 8 \sin \alpha \cos \alpha = 16 \sin \alpha \cos \alpha$$

Como $\operatorname{tg} \theta = 2\sqrt{2}$ e $\operatorname{tg}^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$, temos que:

$$\begin{aligned}(2\sqrt{2})^2 + 1 &= \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow 4 \times 2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow 9 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos \theta &= \pm \sqrt{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow \cos \theta = \pm \frac{1}{3} \Leftrightarrow_{\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[} \cos \theta = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

E, pela fórmula fundamental da trigonometria, vem:

$$\sin^2 \theta + \frac{1}{9} = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \theta = 1 - \frac{1}{9} \Leftrightarrow \sin^2 \theta = \frac{8}{9} \Leftrightarrow \sin \theta = \pm \sqrt{\frac{8}{9}} \Leftrightarrow \sin \theta = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow_{\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[} \sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Finalmente, recorrendo à fórmula de $A(\alpha)$, deduzida antes, temos que:

$$A(\theta) = 16 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{32\sqrt{2}}{9}$$

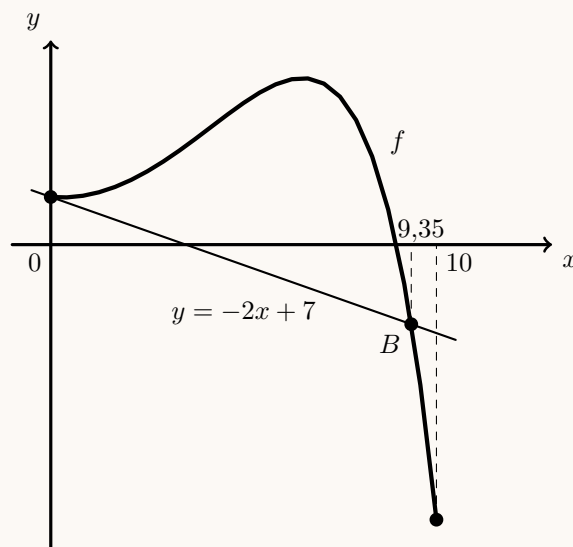
6. Como o ponto A pertence ao eixo das ordenadas, tem abscissa $x = 0$; como também pertence ao gráfico de f , tem ordenada $f(0)$. Assim, calculando a ordenada do ponto A , temos:

$$f(0) = -e^{\frac{0}{2}} + 0^2 + 8 = -e^0 + 0 + 8 = -1 + 8 = 7$$

A reta AB tem declive -2 e passa no ponto A , logo é a reta de equação $y = -2x + 7$, e assim, o ponto B é a interseção da reta AB com o gráfico da função f , pelo que a abscissa do ponto B é a solução da equação

$$f(x) = -2x + 7 \Leftrightarrow -e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8 = -2x + 7$$

Visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função f , numa janela coerente com o domínio da função, e a reta AB (reproduzidos na figura ao lado), e usando a calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos, obtemos um valor aproximado (às centésimas) da abscissa do ponto B , $x_B \approx 9,35$



7. Relativamente à afirmação **(I)**, podemos estudar a variação do sinal da função h' , derivada de h (recorrendo à observação do gráfico de f), e relacionar com a monotonia de h :

x	$-\infty$	-2		3	$+\infty$
f	+	0	+	0	-
e^{2x}	+	+	+	+	+
$h'(x)$	+	0	+	0	-
$h(x)$	\nearrow	0	\nearrow	Máx.	\searrow

Assim, podemos concluir que a função h é crescente no intervalo $]-\infty, 3]$ e decrescente no intervalo $[3, +\infty[$, pelo que tem um único extremo (para $x = 3$), ou seja a afirmação **(I)** é **falsa**.

Relativamente à afirmação **(II)**, temos que

$$h''(x) = \left(\frac{f(x)}{e^{2x}} \right)' = \frac{f'(x)e^{2x} - f(x)(e^{2x})'}{(e^{2x})^2} = \frac{f'(x)e^{2x} - f(x)(2x)'e^{2x}}{(e^{2x})(e^{2x})} = \frac{e^{2x}(f'(x) - f(x) \times 2)}{(e^{2x})(e^{2x})} = \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}}$$

Como -2 é um zero de f , temos que $f(-2) = 0$, e como f tem um extremo relativo em $x = -2$, então $f'(-2) = 0$, e assim, vem que:

$$h''(-2) = \frac{f'(-2) - 2f(-2)}{e^{2 \times (-2)}} = \frac{0 - 2 \times 0}{e^{-4}} = \frac{0}{e^{-4}} = 0$$

Logo, podemos concluir que a afirmação **(II)** é **verdadeira**.

Relativamente à afirmação **(III)**, como $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 3$, podemos concluir que quando x tende para $+\infty$, a reta de equação $y = 3$ é uma assíntota do gráfico de h .

Assim, quando x tende para $+\infty$, a reta de equação $y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = -3$ não pode ser assíntota do gráfico de h , pelo que podemos afirmar que a afirmação **(III)** é **falsa**.

