Exame nacional de Matemática A **(2013, Época especial)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Temos que A e B são acontecimentos incompatíveis, logo $P(A \cap B) = 0$

   Como $P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(B) - P(A \cap B)$, e $P(A \cap B) = 0$, vem que:
   $P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(B)$, pelo que $P(B) = 0{,}55$

   Como $P\left(A \cup B\right) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, $P(A \cap B) = 0$ e $P(A) = 0{,}3$, temos que:
   $P\left(A \cup B\right) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}55 = 0{,}85$

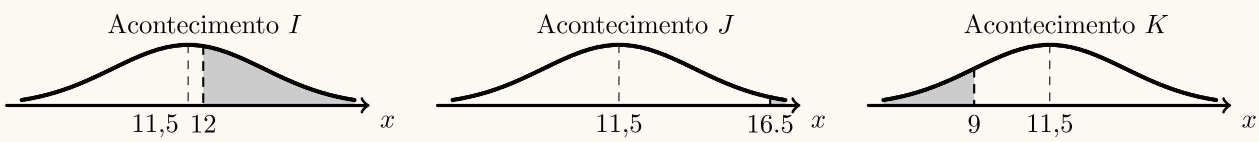
   Assim, pelo teorema do acontecimento contrário, $P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P\left(A \cup B\right) = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$

   Finalmente, pelas leis de De Morgan, temos que:

   $$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 0{,}15$$

   Resposta: **Opção C**

2. Esboçando a representação da representação geométrica das probabilidades dos três acontecimentos, vem:



   Assim podemos afirmar que o acontecimento I é o mais provável e o acontecimento J, o menos provável, pelo que:

   $$P(J) < P(K) < P(I)$$

   Resposta: **Opção A**

3. Para que a comissão seja mista, deve ter pelo menos um rapaz, e como deve ter mais raparigas que rapazes, então o número de comissões diferentes que se podem formar pode ser calculado como a **soma** de comissões diferentes relativas a composições de dois tipos:

   - 3 raparigas e 2 rapazes
     Como a ordem não é relevante podemos escolher 3 raparigas do conjunto das 15, de ${}^{15}C_3$ formas diferentes e podemos escolher os 2 rapazes de ${}^{7}C_2$ formas diferentes, logo existem ${}^{15}C_3 \times {}^{7}C_2$ comissões deste tipo
   - 4 raparigas e 1 rapaz
     As comissões deste tipo são ${}^{15}C_4 \times 7$ que correspondem a escolher 4 das 15 raparigas e 1 dos 7 rapazes, sem considerar a ordem relevante.

   Assim, o número de comissões diferentes que se podem formar, de acordo com as condições impostas, é:

   $${}^{15}C_3 \times {}^{7}C_2 + {}^{15}C_4 \times 7$$

   Resposta: **Opção B**

4. Determinando a expressão da segunda derivada vem:

   $$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left((4+x)^2\right)' = (4^2 + 2 \times 4x + x^2)' = (16)' + (8x)' + (x^2)' = 0 + 8 + 2x = 2x + 8$$

   Calculando o zero da segunda derivada temos:

   $$f''(x) = 0 \iff 2x + 8 = 0 \iff 2x = -8 \iff x = -4$$

   Estudando o sinal da segunda derivada para relacionar com o sentido das concavidades, vem:

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
$g''(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\frown$	Pt. I.	$\smile$

   Logo, podemos concluir que gráfico da função f tem um ponto de inflexão de coordenadas $(-4, f(-4))$

   Resposta: **Opção D**

   A afirmação da opção (A) é falsa porque existem objetos cuja imagem pela segunda derivada é negativa ($x \in]-\infty, -4[$).
   A afirmação da opção (B) é falsa, porque apesar da primeira derivada ter um zero ($x = -4$), este não está associado a uma mudança de sinal.
   A afirmação da opção (C) é falsa porque o gráfico de f tem um ponto de inflexão.

5. Como $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) + 2x] = 2$, temos que $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (-2x)] = 2$, o que significa que a reta de equação $y = -2x + 2$ é assíntota do gráfico de f, quando $x \to -\infty$
   O único gráfico que admite a reta $y = -2x + 2$ como assíntota é o da opção (A).

   Resposta: **Opção A**

6. Simplificando a condição $\ln(e^{-x} - a) \leq 0$, como a função logarítmica tem imagens não positivas para $x \in]0,1]$, temos:

   $\ln(e^{-x} - a) \leq 0 \iff 0 < e^{-x} - a \leq 1 \iff e^{-x} - a > 0 \wedge e^{-x} - a \leq 1 \iff e^{-x} > a \wedge e^{-x} \leq 1 + a \iff$
   $\iff -x > \ln(a) \wedge -x \leq \ln(1+a) \iff x < -\ln(a) \wedge x \geq -\ln(1+a)$

   Assim, $S = [-\ln(1+a), -\ln(a)[$

   Resposta: **Opção B**

7. Escrevendo $(1+i)$ na f.t. temos $(1+i) = \rho \operatorname{cis} \theta$, onde:

   - $\rho = |(1+i)| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
   - $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{1} = 1$; como $\operatorname{sen} \theta > 0$ e $\cos \theta > 0$, θ é um ângulo do 1º quadrante, logo $\theta = \frac{\pi}{4}$

   Logo $(1+i) = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$

   Pela fórmula de Moivre para a potência temos que:

   Como $w = (1+i)^{2013} = \left(\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}\right)^{2013} = \sqrt{2}^{2013} \operatorname{cis} \left(2013 \times \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}^{2013} \operatorname{cis} \frac{2013\pi}{4}$

   Assim:
   $\arg(w) = \frac{2013\pi}{4} = \frac{(4 \times 503 + 1)\pi}{4} = \frac{4 \times 503\pi + \pi}{4} = \frac{4 \times 503\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 503\pi + \frac{\pi}{4}$
   Descontando as voltas completas temos $\arg(w) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

   Ou seja, a representação geométrica de w é um ponto do 3º quadrante que pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, pelo que $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$

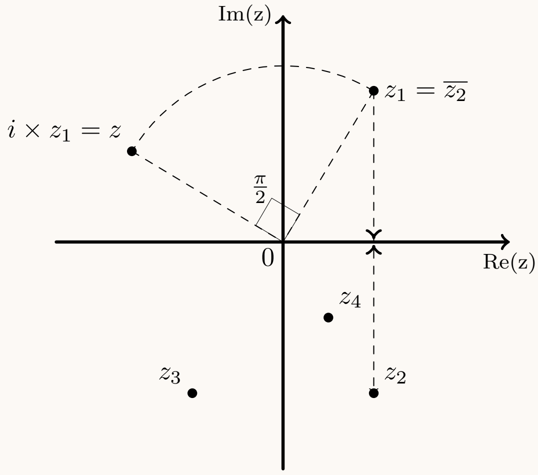
   Resposta: **Opção D**

8. As operações "*multiplicar por i*" e "*transformar no conjugado*" correspondem geometricamente a "fazer uma rotação de centro em O e amplitude $\frac{\pi}{2}$ radianos" e "encontrar o ponto simétrico relativamente ao eixo real", respetivamente.

   Assim, se considerarmos as operações inversas, pela ordem inversa, a partir da imagem geométrica de z, (como indicado na figura), obtemos como resposta a imagem geométrica de z_2.

   Ou, dizendo de outra forma, se $w = z_2$, temos que $\overline{w} = \overline{z_2} = z_1$ e $i \times \overline{w} = i \times z_1 = z$, pelo que $w = z_2$.

   Resposta: **Opção C**



GRUPO II

1.

1.1. Como $\cos\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ vem que:

$$1 + 2i \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 1 + 2i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \frac{1}{2}\right) = 1 - \sqrt{3}i + i^2 = 1 - \sqrt{3}i - 1 = -\sqrt{3}i = \sqrt{3}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

Escrevendo $1+\sqrt{3}i$ na f.t. temos $1+\sqrt{3}i = \rho \operatorname{cis}\theta$, onde:

- $\rho = |1+\sqrt{3}i| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- $\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$; como $\operatorname{sen}\theta > 0$ e $\cos\theta > 0$, θ é um ângulo do 1º quadrante, logo $\theta = \frac{\pi}{3}$

Assim $1+\sqrt{3}i = 2\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}$

$$\text{Logo } z_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{1+2i\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{2\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}}{\sqrt{3}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{2\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{6}+\frac{3\pi}{6}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{6}$$

Se $z = \operatorname{cis}\theta$, então $\frac{z}{z_1} = \frac{\operatorname{cis}\theta}{\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}\operatorname{cis}\left(\theta - \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{2\sqrt{3}}\operatorname{cis}\left(\theta - \frac{5\pi}{6}\right)$

E como $\frac{z}{z_1}$ é número real negativo, então $\arg\left(\frac{z}{z_1}\right) = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, logo temos que:

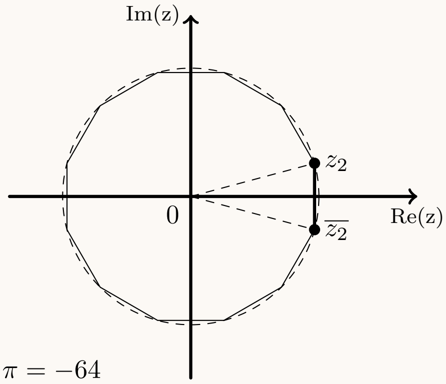
$$\theta - \frac{5\pi}{6} = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \pi + \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{6\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$

Como $\theta \in [0,2\pi[$, então $k=0$ e $\theta = \frac{11\pi}{6}$

1.2. Sabemos que $|\overline{z_2}| = |z_2|$ e que $\arg(\overline{z_2}) = -\arg(z_2)$, logo $\overline{z_2} = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

Assim, temos que o polígono regular pode ser decomposto em n triângulos isósceles, congruentes com o triângulo OAA', em que o ponto A é a imagem geométrica de z_2 e A' é a imagem geométrica de $\overline{z_2}$. Como a amplitude do ângulo AOA' é $2 \times \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$, sabemos que:

$$\frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{2\pi\times 6}{\pi} = n \Leftrightarrow 12 = n$$



Assim temos que z_2 (e também $\overline{z_2}$) são raízes de índice 12 de w, ou seja $w = (z_2)^{12}$, logo usando a fórmula de Moivre e escrevendo o resultado da potência na f.a., temos:

$$w = (z_2)^{12} = \left(\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^{12} = (\sqrt{2})^{12}\operatorname{cis}\left(12\times\frac{\pi}{12}\right) = 64\operatorname{cis}\pi = -64$$

2. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, uma lâmpada produzida nessa empresa, e os acontecimentos:
F:≪A lâmpada escolhida é fluorescente≫
T:≪A lâmpada escolhida tem a forma tubular≫
Temos que $P(F) = 0{,}55$, $P(T|F) = 0{,}5$ e $P\left(\overline{T}|\overline{F}\right) = 0{,}9$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P\left(\overline{F}\right) = 1 - P(F) = 1 - 0{,}55 = 0{,}45$
- $P(T \cap F) = P(F) \times P(T|F) = 0{,}55 \times 0{,}5 = 0{,}275$
- $P\left(\overline{T} \cap F\right) = P(F) - P(T \cap F) = 0{,}55 - 0{,}275 = 0{,}275$
- $P\left(\overline{T} \cap \overline{F}\right) = P\left(\overline{F}\right) \times P\left(\overline{T}|\overline{F}\right) = 0{,}45 \times 0{,}9 = 0{,}405$
- $P\left(\overline{T}\right) = P\left(\overline{T} \cap \overline{F}\right) + P\left(\overline{T} \cap F\right) = 0{,}275 + 0{,}405 = 0{,}68$
- $P(T) = 1 - P\left(\overline{T}\right) = 1 - 0{,}68 = 0{,}32$

	F	$\overline{F}$	
T	0,275		0,32
$\overline{T}$	0,275	0,405	0,68
	0,55	0,45	1

Assim, calculando a probabilidade de, ao escolher, ao acaso, uma lâmpada produzida nessa empresa, ela ser fluorescente, sabendo que tem a forma tubular, e escrevendo o resultado com arredondamento às centésimas, temos

$$P\left(F|T\right) = \frac{P(F \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}275}{0{,}32} \approx 0{,}86$$

3.

3.1.

3.2. Existem 12 bolas numeradas de 1 a 12 e só duas delas têm um número múltiplo de 5 (a bola com o número 5 e a bola com o número 10).
Assim, ao retirarmos 3 bolas, podemos ter 0 bolas numeradas com múltiplos de 5, apenas 1 bola numerada com um número múltiplo de 5 ou 2 bolas numeradas com números múltiplos de 5.
Assim, calculando as respetivas probabilidades temos:

- $P(X=0) = \frac{{}^{2}C_0 \times {}^{10}C_3}{{}^{12}C_3} = \frac{1 \times 120}{220} = \frac{120}{220} = \frac{12}{22} = \frac{6}{11}$
- $P(X=1) = \frac{{}^{2}C_1 \times {}^{10}C_2}{{}^{12}C_3} = \frac{2 \times 45}{220} = \frac{90}{220} = \frac{9}{22}$
- $P(X=2) = \frac{{}^{2}C_2 \times {}^{10}C_1}{{}^{12}C_3} = \frac{1 \times 10}{220} = \frac{1}{22}$

Logo a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{6}{11}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{1}{22}$

3.3. Como as sucessivas extrações das bolas são feitas repondo a bola extraída anteriormente, cada repetição da experiência é feita de forma independente das restantes.
Definindo o acontecimento ≪*registar número múltiplo de 3*≫ como sucesso, este acontecimento tem probabilidade não nula em cada repetição da experiência e como as repetições são independentes, a probabilidade é constante em cada uma delas.

Assim, para a aplicação do modelo binomial $\left(P(X=k) = {}^nC_k\, p^k\, q^{n-k}\right)$, como o João fará extrações sucessivas até ter registado 8 elementos, temos que a experiência será repetida 8 vezes ($n=8$).
Como definimos o acontecimento ≪*registar número múltiplo de 3*≫ como sucesso, temos que a probabilidade é $p = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ (das 12 bolas, 4 são múltiplos de 3: $M_3 = \{3{,}6{,}9{,}12\}$).
Logo a probabilidade do insucesso é $q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.
Como se pretende calcular a probabilidade de que nas 8 experiências, sejam registados exatamente 5 vezes números múltiplos de 3, temos que $k=5$.

Assim, temos que:

$$P(X=5) = {}^8C_5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^{8-5} = \left(\frac{1}{3}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times {}^8C_5$$

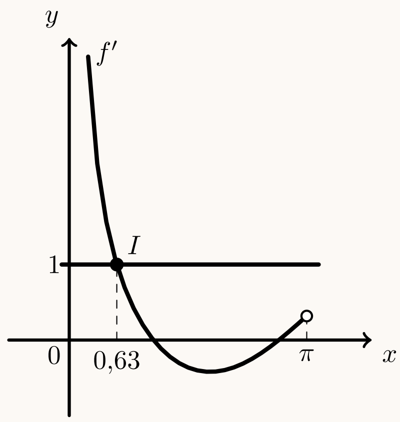
4. Como o declive da reta tangente ao gráfico da função, em cada ponto, é dado pela função derivada, vamos determinar a expressão analítica da função derivada:
$f'(x) = (\ln x + \cos x - 1)' = (\ln x)' + (\cos x)' - (1)' = \frac{1}{x} + (-\operatorname{sen} x) - 0 = \frac{1}{x} - \operatorname{sen} x$

Como o declive de uma reta é dado pela tangente da sua inclinação, temos que: $m = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$

Logo a abcissa do ponto A é a solução da equação:

$$f'(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} - \operatorname{sen} x = 1$$

Assim, visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função f' e a reta $y=1$, numa janela coerente com o domínio da função f ($0 < x < \pi$), (reproduzido na figura ao lado) e determinando a interseção das duas, obtemos os valores aproximados (às centésimas) das coordenadas do ponto: $I(0{,}63; 1{,}00)$.



Ou seja o valor aproximado às centésimas da abcissa do ponto A, é 0,63

5.

5.1. Sabemos que $f(0) = \ln k$

Calculando $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ temos:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{3x}{1 - e^{2x}} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{2 \times 3x}{2}}{-(e^{2x} - 1)} = \lim_{x \to 0^-} \left(-\frac{3}{2} \times \frac{2x}{e^{2x} - 1} \right) =$$

$$= -\frac{3}{2} \times \lim_{x \to 0^-} \frac{2x}{e^{2x} - 1} = -\frac{3}{2} \times \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{\frac{e^{2x} - 1}{2x}} = -\frac{3}{2} \times \frac{1}{\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{2x}} =$$

(se $y = 2x$, como $x \to 0^-$ então $y \to 0^-$)

$$= -\frac{3}{2} \times \frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{y \to 0^-} \frac{e^{y} - 1}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = -\frac{3}{2} \times \frac{1}{1} = -\frac{3}{2}$$

Assim, para que $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$, temos que:

$$-\frac{3}{2} = \ln k \quad \Leftrightarrow \quad k = e^{-\frac{3}{2}}$$

5.2. Começamos por determinar a expressão da derivada da função, para $x \in]0,+\infty[$

$$\left(\frac{x}{2}-\ln\left(\frac{6x}{x+1}\right)\right)' = \left(\frac{x}{2}\right)' - \left(\ln\left(\frac{6x}{x+1}\right)\right)' = \frac{1}{2}\times (x)' - \frac{\left(\frac{6x}{x+1}\right)'}{\frac{6x}{x+1}} =$$

$$= \frac{1}{2}\times 1 - \frac{\frac{(6x)'(x+1)-(6x)(x+1)'}{(x+1)^2}}{\frac{6x}{x+1}} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{6(x+1)-(6x)(1+0)}{(x+1)^2}}{\frac{6x}{x+1}} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\frac{6(x+1)-6x}{x+1}}{6x} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{6x+6-6x}{x+1}}{6x} = \frac{1}{2} - \frac{6}{6x(x+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x(x+1)}$$

Determinando os zeros da derivada em $]0,+\infty[$, vem:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{x(x+1)} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2} = \frac{1}{x(x+1)} \underbrace{\Leftrightarrow}_{x(x+1)\neq 0} x(x+1) = 2 \;\Leftrightarrow\; x^2+x-2=0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x = \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(-2)}}{2\times 1} \;\Leftrightarrow\; x=1 \vee x=-2$$

Como $-2 \notin]0,+\infty[$, 1 é o único zero da derivada em $]0,+\infty[$
Estudando, neste intervalo, a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$

Assim, podemos concluir $f(1)$ é um extremo relativo da função f em $]0,+\infty[$.
Calculando $f(1)$ temos:

$$f(1) = \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{6(1)}{1+1}\right) = \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{6}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ln 3 = \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) - \ln 3 = \ln\left(\sqrt{e}\right) - \ln 3 = \ln\left(\frac{\sqrt{e}}{3}\right)$$

6. Como $y=2x-1$ é assíntota do gráfico de g, e o domínio da função g é $\mathbb{R}^+$, temos que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=2$
Como o domínio da função h é $\mathbb{R}^+$, vamos calcular o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$:

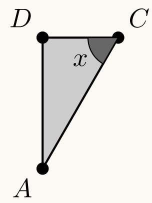
$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-[g(x)]^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{[g(x)]^2}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} - \lim_{x\to+\infty}\frac{[g(x)]^2}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{+\infty} - \lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{g(x)}{x}\right)^2\right] = 0 - \left(\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}\right)^2 = -2^2 = -4$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -4$, o gráfico de h tem uma assíntota horizontal.

7.

7.1. Vamos considerar $\overline{DA}$ a medida da altura do triângulo e $\overline{EC}$ a medida da base.
Sabemos que $\overline{CA} = 1$, porque é a medida do raio da circunferência.



Como $[CA]$ é a hipotenusa do triângulo e $[DA]$ o cateto oposto ao ângulo x, usando o seno do ângulo temos que:

$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{DA}}{\overline{CA}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\overline{DA}}{1} \Leftrightarrow \overline{DA} = \operatorname{sen} x$$

Por outro lado, como $[DC]$ é o cateto adjacente, usando a definição de cosseno, temos:

$$\cos x = \frac{\overline{DC}}{\overline{CA}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{DC}}{1} \Leftrightarrow \overline{DC} = \cos x$$

Como $\overline{ED} = 6$ temos que:

$$\overline{EC} = \overline{ED} + \overline{DC} \Leftrightarrow \overline{EC} = 6 + \cos x$$

Logo, calculando a área do triângulo, obtemos:

$$A_{[AEC]} = \frac{\overline{EC} \times \overline{DA}}{2} = \frac{(6+\cos x)(\operatorname{sen} x)}{2} = \frac{6 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cos x}{2} = 3 \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2}$$

Como $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$, podemos escrever:

$$A_{[AEC]} = 3 \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2} = 3 \operatorname{sen} x + \frac{\frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{2}}{2} = 3 \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} = 3 \operatorname{sen} x + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x)$$

7.2. Como a função f resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $\mathbb{R}$, é uma função contínua, e, por isso, também é contínua em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Como $1{,}72 < 2 < 2{,}37$, ou seja, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) < 2 < f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$ tal que $f(c) = 2$, ou seja, que a equação $f(x) = 2$ tem, pelo menos, uma solução em $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$.

C.A.

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) = $$
$$= 3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = $$
$$\approx 1{,}72$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right) = $$
$$= 3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = $$
$$\approx 2{,}37$$