Exame nacional de Matemática A **(2013, 2.ª fase)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. A escolha pode ser feita selecionando, 9 dos 16 quadrados para colocar os discos brancos (não considerando a ordem relevante porque os discos são iguais). Ou seja, ${}^{16}C_9$ são as diferentes formas de dispor os discos brancos no tabuleiro.

   Depois, selecionamos 3 quadrados, de entre os 7 que permanecem sem qualquer disco. Ou seja ${}^{7}C_3$ são as diferentes formas de dispor os discos pretos no tabuleiro, depois de termos colocado os 9 discos brancos.

   Assim, o número de formas diferentes de colocar os 12 discos no tabuleiro, de acordo com as condições definidas é

   $${}^{16}C_9 \times {}^{7}C_3$$

   Resposta: **Opção B**

2. O segundo e o penúltimo números de qualquer linha do triângulo de Pascal são iguais.
   Assim, se o produto do segundo elemento pelo penúltimo elemento de um linha é 484, podemos calcular o valor de ambos:

   $$a \times a = 484 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = 484 \quad \Leftrightarrow \quad a = \sqrt{484} \quad \Leftrightarrow \quad a = 22$$

   Assim, temos que a linha em causa tem 23 elementos da forma ${}^{22}C_n$.
   Logo só existem 6 elementos desta linha que são inferiores a 1000:
   ${}^{22}C_0 = {}^{22}C_{22} (= 1)$; ${}^{22}C_1 = {}^{22}C_{21} (= 22)$ e ainda ${}^{22}C_2 = {}^{22}C_{20} (= 231)$
   Porque
   ${}^{22}C_3 = {}^{22}C_{19} = 1540$ e todos os restantes são superiores a estes.

   Logo, sabemos que existem $23 - 6 = 17$ elementos superiores a 1000 num total de 23, ou seja, o valor da probabilidade é $\frac{17}{23}$

   Resposta: **Opção C**

3. Usando as propriedades dos logaritmos, temos que

   $$\log_a \left(a^5 \times \sqrt[3]{b} \right) + a^{\log_a b} = \log_a \left(a^5 \right) + \log_a \sqrt[3]{b} + b = 5 + \log_a \left(b^{\frac{1}{3}} \right) + b =$$

   $$= 5 + \frac{1}{3} \log_a b + b = 5 + \frac{1}{3} \times 3 + b = 5 + 1 + b = 6 + b$$

   Resposta: **Opção A**

4. Como, a função f é contínua em $[-e,1]$, e como $1 < \frac{e}{2} < e$, ou seja, $f(-e) < \frac{e}{2} < f(1)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]-e,1[$ tal que $f(c) = \frac{e}{2}$, ou seja, que a equação $f(x) = \frac{e}{2}$ tem, pelo menos, uma solução em $]-e,1[$

   Resposta: **Opção D**

5. Sabemos que a é um zero da primeira derivada (porque $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0 \Leftrightarrow f'(a) = 0$) e que tem uma mudança de sinal associada, (porque $f''(x) < 0$, ou seja, f' é decrescente):

x		a	
$\left(f'(x)\right)'$		$-$	
$f'(x)$		$\searrow$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	Máx	$\searrow$

   Logo podemos concluir que a é um maximizante, e por isso $f(a)$ é um máximo relativo da função f.

   Resposta: **Opção B**

   Não existem dados suficientes para rejeitar ou validar a afirmação da opção (A).
   A afirmação (C) é falsa, porque se a fosse um minimizante, então $f''(a) > 0$.
   A afirmação (D) é falsa, porque se P fosse um ponto de inflexão, então $f''(a) = 0$

6. Podemos descrever a monotonia da função g pela análise do gráfico, e relacionar com a variação do sinal da derivada:

x	$-\infty$	a		b	$+\infty$
$g(x)$	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	min	$\nearrow$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

   Pela observação do gráfico de g podemos ainda afirmar que $-2 < a < 0$ e $0 < b < 2$.
   Como $f(x) = g(x-3)$, o gráfico de f resulta de uma translação horizontal do gráfico de g, de 3 unidades para a direita.
   Assim, temos que os extremos da função f têm abcissas $a+3$ e $b+3$, e a variação do sinal é dado por:

x	$-\infty$	$a+3$		$b+3$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	min	$\nearrow$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

   Como $-2 < a < 0$, temos que $1 < a+3 < 3$; e como $0 < b < 2$, sabemos que $3 < b+3 < 5$, pelo que o gráfico da opção (A) é o único compatível com as condições.

   Resposta: **Opção A**

7. Se $z = 2 + bi$, então $\overline{z} = 2 - bi$

   Assim temos $\text{Re}\left(\overline{z}\right) > 0$ e como $b < 0$, $\text{Im}\left(\overline{z}\right) > 0$, pelo que sabemos que ¡ representação geométrica de $\overline{z}$ pertence ao primeiro quadrante, logo $\text{Arg}\left(\overline{z}\right)$ não pode ser $-\alpha$

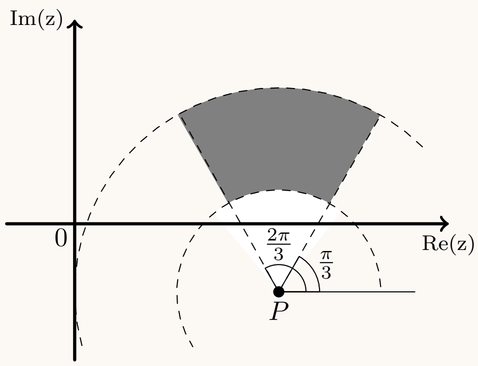
   Por outro lado $|\overline{z}| = \sqrt{2^2 + b^2}$, como $b^2 > 0$, temos que $|\overline{z}| > 2$, logo $|\overline{z}|$ não pode ser $\frac{3}{2}$

   Resposta: **Opção C**

8. Podemos reescrever a condição dada na forma:

$$\frac{3}{2} \leq |z - 3 + i| \leq 3 \wedge \frac{\pi}{3} \leq \arg(z - 3 + i) \leq \frac{2\pi}{3} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{2} \leq |\mathbf{z\text{-}(3\text{-}i)}| \leq 3 \wedge \frac{\pi}{3} \leq \arg(\mathbf{z\text{-}(3\text{-}i)}) \leq \frac{2\pi}{3}$$



   Assim, sendo o ponto P a representação geométrica do número complexo $3 - i$, a condição define o conjunto de pontos do plano complexo que:

   - estão a uma distância do ponto P compreendida entre $\frac{3}{2}$ e 3
   - definem com a semirreta paralela ao eixo real com origem no ponto P e que se prolonga no sentido positivo do eixo, um ângulo compreendido entre $\frac{\pi}{3}$ *rad* e $\frac{2\pi}{3}$ *rad*

   Resposta: **Opção A**

GRUPO II

1.

1.1. Como $i^{22} = i^{4\times 5+2} = i^2 = -1$, temos que:

$$z_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} + i^{22} = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} - 1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} - \frac{2}{2} = \frac{1-2+\sqrt{3}i}{2} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$$

Escrevendo z_1 na f.t. temos $z_1 = \rho \operatorname{cis}\theta$, onde:

- $\rho = |z_1| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1$
- $\operatorname{tg}\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$; como $\operatorname{sen}\theta > 0$ e $\cos\theta < 0$, θ é um ângulo do 2º quadrante, logo $\theta = \frac{2\pi}{3}$

Assim $z_1 = \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$

E como $-2 = 2\operatorname{cis}\pi$ e $i = \operatorname{cis}\frac{\pi}{2}$, temos que:

$$z_2 = \frac{-2}{iz_1} = \frac{2\operatorname{cis}\pi}{\operatorname{cis}\frac{\pi}{2} \times \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}} = \frac{2\operatorname{cis}\pi}{\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{2\operatorname{cis}\pi}{\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{6}+\frac{4\pi}{6}\right)} = \frac{2\operatorname{cis}\pi}{\operatorname{cis}\frac{7\pi}{6}} = 2\operatorname{cis}\left(\pi - \frac{7\pi}{6}\right) = 2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

Assim temos que $(z_2)^n = \left(2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)^n = 2^n \operatorname{cis}\left(n \times \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

E para que $(z_2)^n$ seja um número real negativo, $\arg(z_2)^n = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; ou seja:

$$n \times \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \pi + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow n = \frac{\pi+2k\pi}{-\frac{\pi}{6}},\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow n = \frac{6\pi+12k\pi}{-\pi},\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow n = -6-12k,\ k\in\mathbb{Z}$$

Como , $n = -6-12k \Leftrightarrow \frac{n+6}{-12} = k \Leftrightarrow \frac{-n-6}{12} = k$

logo, para que $k \in \mathbb{Z}$, o menor valor natural que n pode tomar é 6, ficando $\frac{-6-6}{12} = k \Leftrightarrow k = -1$

1.2. Fazendo a simplificação temos:

$\frac{\cos(\pi-\alpha)+i\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\cos(\pi-\alpha)+i\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha}$	Porque $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha$
$= \frac{\cos(\pi-\alpha)+i\operatorname{sen}(\pi-\alpha)}{\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha}$	Porque $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\pi-\alpha)$
$= \frac{\operatorname{cis}(\pi-\alpha)}{\operatorname{cis}\alpha}$	
$= \operatorname{cis}(\pi-\alpha-\alpha)$	Fazendo a divisão na f. t.
$= \operatorname{cis}(\pi-2\alpha)$	Como queriamos mostrar

2. Pelas leis de De Morgan, e pelo teorema do acontecimento contrário, temos que:

$$P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cap B}\right)=1-P(A\cap B)$$

Assim, vem que:

$$P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)-P(A\cap B)=\frac{5}{9}\Leftrightarrow 1-P(A\cap B)-P(A\cap B)=\frac{5}{9}\Leftrightarrow 1-2P(A\cap B)=\frac{5}{9}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{5}{9}=2P(A\cap B)\Leftrightarrow\frac{4}{9}=2P(A\cap B)\Leftrightarrow\frac{2}{9}=P(A\cap B)$$

Como $P(B|A)=\dfrac{P(B\cap A)}{P(A)}\Leftrightarrow P(A)=\dfrac{P(B\cap A)}{P(B|A)}$; $P(B\cap A)=\dfrac{2}{9}$ e $P(B|A)=\dfrac{2}{7}$, temos que

$$P(A)=\frac{P(B\cap A)}{P(B|A)}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{7}}=\frac{7}{9}$$

Logo, temos que $P\left(\overline{A}\right)=1-P(A)=1-\dfrac{7}{9}=\dfrac{2}{9}$

E que $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=1-P(A\cap B)=1-\dfrac{2}{9}=\dfrac{7}{9}$

Se repararmos que $\overline{A}\cap\overline{B}=\emptyset$, ou seja que $\overline{A}$ e $\overline{B}$ são acontecimentos incompatíveis (porque não existem números pares iguais ou maiores que 3), temos que:

$$P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}\right)+P\left(\overline{B}\right)\Leftrightarrow P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)-P\left(\overline{A}\right)=P\left(\overline{B}\right)$$

E assim a probabilidade de sair o número 3, ou seja ocorrer o acontecimento $\overline{B}$, é,

$$P\left(\overline{B}\right)=\frac{7}{9}-\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$$

3.

3.1. Como $P(X=1)=\dfrac{3}{5}$, sabemos que $\dfrac{3}{5}$ dos jornalistas são do sexo feminino, ou seja, $\dfrac{3}{5}\times 20=12$ jornalistas so sexo feminino num total de 20, e por isso, 8 jornalistas do sexo masculino.

Escolhendo, ao acaso, 2 jornalistas, de entre os 20, podemos selecionar grupos, com 0, 1 ou 2 jornalistas do sexo feminino, e as probabilidades são:

- $P(Y=0)=\dfrac{{}^{12}C_0\times{}^{8}C_2}{{}^{20}C_2}=\dfrac{1\times 28}{190}=\dfrac{14}{95}$
- $P(Y=1)=\dfrac{{}^{12}C_1\times{}^{8}C_1}{{}^{20}C_2}=\dfrac{12\times 8}{190}=\dfrac{96}{190}=\dfrac{48}{95}$
- $P(Y=2)=\dfrac{{}^{12}C_2\times{}^{8}C_0}{{}^{20}C_2}=\dfrac{66\times 1}{190}=\dfrac{33}{95}$

Logo a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória Y é:

y_i	0	1	2
$P(Y=y_i)$	$\frac{14}{95}$	$\frac{48}{95}$	$\frac{33}{95}$

3.2. A Resposta (I) $({}^{20}C_{16} \times 16! \times {}^{8}A_4)$ pode ser interpretada como:
Selecionando, de entre os 20 jornalistas 16 para ocupar as duas filas da frente, temos ${}^{20}C_{16}$ grupos diferentes de 16 jornalistas.
Como em cada um destes grupos, existem 16! maneiras diferentes de os sentar, correspondentes a todas as trocas de lugar entre eles que podem ser feitas, multiplicamos os dois números.
E, por cada uma das situações diferentes antes consideradas, existem ainda ${}^{8}A_4$ hipóteses a considerar, decorrentes de selecionar 4 cadeiras, ou posições, de entre as 8 existentes na terceira fila (considerando a ordem relevante) para fazer a atribuição de cada uma delas a um dos 4 jornalistas que se senta nesta fila. Como consideramos a ordem relevante, ficam já consideradas as trocas possíveis entre eles.

A Resposta (II) $({}^{20}A_8 \times {}^{12}A_8 \times {}^{8}A_4)$ pode ser interpretada como:
Existem ${}^{20}A_8$ formas de ocupar a primeira fila, selecionam-se 8 de entre os 20 jornalistas (considera-se a ordem relevante para considerar as trocas possíveis entre cada grupo de 8 selecionados).
Por cada uma das hipóteses anteriores, existem ${}^{12}A_8$ formas de ocupar a segunda fila, correspondentes a selecionar 8 de entre os 12 jornalistas que não ocuparam a primeira fila, podendo estes 8 fazer todas as trocas entre si.
Finalmente, por cada uma das ${}^{20}A_8 \times {}^{12}A_8$ formas de ocupar as duas primeira filas, existem ainda ${}^{8}A_4$ hipóteses a considerar, decorrentes de selecionar 4 cadeiras, ou posições, de entre as 8 existentes na terceira fila (considerando a ordem relevante) para fazer a atribuição de cada uma delas a um dos 4 jornalistas que se senta nesta fila. Como consideramos a ordem relevante, ficam já consideradas as trocas possíveis entre eles.

4.

4.1. Para averiguar se a função f é contínua em $x=1$, temos que verificar se $f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

- $f(1) = 1 \times e^{3+1} + 2 \times 1 = e^4 + 2$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(xe^{3+x} + 2x\right) = 1 \times e^{3+1} + 2 \times 1 = e^4 + 2$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{1-\sqrt{x} + \operatorname{sen}(x-1)}{1-x}\right) = \dfrac{1-\sqrt{1^+} + \operatorname{sen}(1^+ - 1)}{1-1^+} = \dfrac{0^- + \operatorname{sen}(0^+)}{0^-} = \dfrac{0}{0}$ (ind.)

$$= \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} + \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x}\right) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right) + \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})}\right) + \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{-(x-1)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1^2-(\sqrt{x})^2}{(1-x)(1+\sqrt{x})}\right) - \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1}\right) =$$

(fazendo $y = x-1$, temos que se $x \to 1^+$, então $y \to 0^+$)

$$= \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})}\right) - \underbrace{\lim_{y\to 0^+}\left(\frac{\operatorname{sen} y}{y}\right)}_{\text{Lim. Notável}} = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right) - 1 =$$

$$= \frac{1}{1+\sqrt{1^+}} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

Como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, não existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$; logo a função f não é contínua em $x=1$

4.2. Para mostrar que o gráfico da função f admite uma assíntota oblíqua de equação $y = mx + b$, quando x tende para $-\infty$, temos:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^{3+x} + 2x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{xe^{3+x}}{x} + \frac{2x}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(e^{3+x} + 2\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} e^{3+x} + \lim_{x\to-\infty} 2 = e^{3+(-\infty)} + 2 = e^{-\infty} + 2 = 0^+ + 2 = 2$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(xe^{3+x} + 2x - 2x\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(xe^{3+x}\right) = -\infty \times e^{3+(-\infty)} =$$

$$= -\infty \times e^{-\infty} + 2 = -\infty \times 0^+ (\text{ indeterminação})$$

(fazendo $y = -x$, temos $x = -y$ e se $x \to -\infty$, então $y \to +\infty$)

$$b = \lim_{x\to-\infty} \left(xe^{3+x}\right) = \lim_{y\to+\infty} \left(-ye^{3-y}\right) = -\lim_{y\to+\infty} \left(ye^{3-y}\right) = -\lim_{y\to+\infty} \left(y \times \frac{e^3}{e^y}\right) = -\lim_{y\to+\infty} \left(e^3 \times \frac{y}{e^y}\right) =$$

$$= -\lim_{y\to+\infty} e^3 \times \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^y} = -e^3 \times \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^y}{y}} = -e^3 \times \frac{\lim_{y\to+\infty} 1}{\underbrace{\lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = -e^3 \times \frac{1}{+\infty} = -e^3 \times 0 = 0$$

Assim temos que a reta de equação $y = 2x$ é uma assíntota do gráfico de f quando x tende para $-\infty$

5. Começando por determinar g'' temos:

$$g''(x) = (g'(x))' = \frac{(e^x + 6e^{-x} + 4x)'}{e^x + 6e^{-x} + 4x} = \frac{(e^x)' + (6e^{-x})' + (4x)'}{e^x + 6e^{-x} + 4x} = \frac{e^x + 6(-x)'e^{-x} + 4}{e^x + 6e^{-x} + 4x} = \frac{e^x - 6e^{-x} + 4}{e^x + 6e^{-x} + 4x}$$

Para determinar o sentido das concavidades, vamos estudar o sinal de g'' :

$$g''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{e^x - 6e^{-x} + 4}{e^x + 6e^{-x} + 4x} = 0 \;\Leftrightarrow\; e^x - 6e^{-x} + 4 = 0 \;\wedge\; e^x + 6e^{-x} + 4x \neq 0 \;\Leftrightarrow$$

(como $e^x + 6e^{-x} + 4x > 0$ em $\mathbb{R}^+$)

$$\Leftrightarrow\; e^x - 6e^{-x} + 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; e^x - 6\frac{1}{e^x} + 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; e^x - \frac{6}{e^x} + 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; (e^x)^2 - 6 + 4e^x = 0 \;\Leftrightarrow$$

(fazendo a substituição de variável $y = e^x$)

$$\Leftrightarrow\; y^2 - 6 + 4y = 0 \;\Leftrightarrow\; y^2 + 4y - 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; y = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; y = \frac{-4 \pm \sqrt{40}}{2} \;\Leftrightarrow\; y = \frac{-4 \pm \sqrt{4 \times 10}}{2} \;\Leftrightarrow\; y = \frac{-4 \pm 2\sqrt{10}}{2} \;\Leftrightarrow\; y = -2 \pm \sqrt{10} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; y = \frac{-4 \pm \sqrt{40}}{2} \;\Leftrightarrow\; y = -2 + \sqrt{10} \vee y = -2 + \sqrt{10} \quad (-2 - \sqrt{10} \notin \mathbb{R}^+) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; y = -2 + \sqrt{10} \;\Leftrightarrow\; e^x = -2 + \sqrt{10} \;\Leftrightarrow\; x = \ln(-2 + \sqrt{10})$$

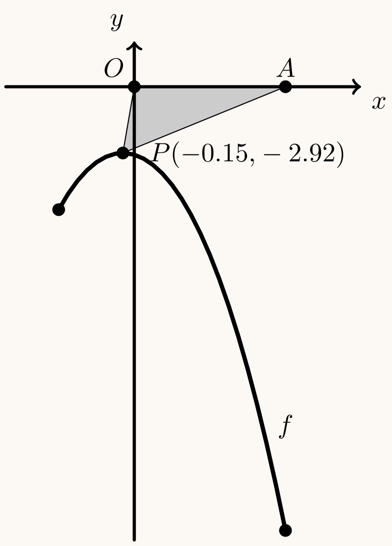
Assim, estudando a variação de sinal de g'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de g, vem:

x	0		$\ln(-2+\sqrt{10})$	$+\infty$
$g''(x)$	n.d.	$-$	0	$+$
$g(x)$	n.d.	$\frown$	Pt. I.	$\smile$

Logo, podemos concluir que o gráfico de g:

- tem um único ponto de inflexão (de abcissa $x = \ln(-2 + \sqrt{10})$)
- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]0, \ln(-2 + \sqrt{10})[$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $]\ln(-2 + \sqrt{10}), +\infty[$

6. Representado o gráfico de f, no domínio definido (reproduzido na figura ao lado, numa janela compatível com o domínio da função $(-1 \leq x \leq 2)$), podemos observar que o triângulo $[OAP]$ terá área mínima quando a ordenada do ponto P corresponder ao máximo da função.



Usando a função da calculadora gráfica para determinar o máximo de uma função num intervalo, determinámos valores aproximados às centésimas para as coordenadas de $P(-0.15, -2.92)$.

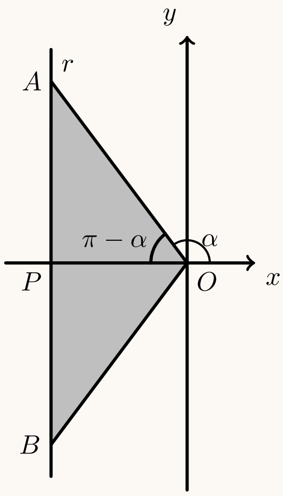
Designado a ordenada do ponto P por y_P, temos que o valor da área do triângulo $[OAP]$ (arredondado às centésimas) é:

$$A_{[AOP]} = \frac{\overline{OA} \times |y_P|}{2} = \frac{2 \times |-2.92|}{2} = 2.92$$

7.

7.1. Começamos por definir o ponto $P(-3{,}0)$ e o ângulo AOP, cuja amplitude é $\pi - \alpha$.

Assim, como sabemos que que $\overline{OP} = 3$, podemos usar a definição de cosseno podemos calcular $\overline{OA}$:



$$\cos(\pi-\alpha) = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos(\pi-\alpha) = \frac{3}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \overline{OA} = \frac{3}{\cos(\pi-\alpha)}$$

Como $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$, temos que:

$$\overline{OA} = \frac{3}{\cos(\pi-\alpha)} \Leftrightarrow \overline{OA} = \frac{3}{-\cos\alpha} \Leftrightarrow \overline{OA} = -\frac{3}{\cos\alpha}$$

Depois, calculamos $\overline{AP}$ recorrendo à definição de tangente:

$$\operatorname{tg}(\pi-\alpha) = \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(\pi-\alpha) = \frac{\overline{AP}}{3} \Leftrightarrow \overline{AP} = 3\operatorname{tg}(\pi-\alpha)$$

Como $\operatorname{tg}(\pi-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, temos que:

$$\overline{AP} = 3\operatorname{tg}(\pi-\alpha) \Leftrightarrow \overline{AP} = -3\operatorname{tg}\alpha$$

Como $\overline{AB} = 2\times\overline{AP}$ e $\overline{OB} = \overline{OA}$, calculado a expressão do perímetro vem:

$$P_{[OAB]} = \overline{AB} + \overline{OA} + \overline{OB} = 2\times\overline{AP} + 2\times\overline{OA} = 2\times(-3\operatorname{tg}\alpha) + 2\times\left(-\frac{3}{\cos\alpha}\right) = -6\operatorname{tg}\alpha - \frac{6}{\cos\alpha}$$

Logo, para cada $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, o perímetro do triângulo é $P(x) = -6\operatorname{tg}x - \dfrac{6}{\cos x}$

7.2. Como o declive da reta tangente num ponto é dado pela valor da derivada nesse ponto, vamos calcular a derivada da função P:

$$P'(x) = \left(-6\operatorname{tg}x - \frac{6}{\cos x}\right)' = (-6\operatorname{tg}x)' - \left(\frac{6}{\cos x}\right)' = -6(\operatorname{tg}x)' - \frac{(6)'(\cos x) - 6(\cos x)'}{(\cos x)^2} =$$

$$= -6\left(\frac{1}{(\cos x)^2}\right) - \frac{0 - 6(-\operatorname{sen}x))}{(\cos x)^2} = \frac{-6}{\cos^2 x} - \frac{6\operatorname{sen}x}{\cos^2 x} = \frac{-6 - 6\operatorname{sen}x}{\cos^2 x}$$

Assim, o declive da reta tangente ao gráfico da função P no ponto de abcissa $\frac{5\pi}{6}$, é

$$m = P'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{-6 - 6\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{\cos^2\left(\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{-6 - 6\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2} = \frac{-6 - 6\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{-6-3}{\frac{3}{4}} = \frac{-9}{\frac{3}{4}} = -12$$