Exame nacional de Matemática A (2011, Prova especial)

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Temos que $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$, e como A e B são acontecimentos independentes, vem que $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

   Assim,

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\ \Leftrightarrow\ P(A\cup B)-P(A)=P(B)-P(A)\times P(B)\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ P(A\cup B)-P(A)=P(B)\big(1-P(A)\big)\ \Leftrightarrow\ P(A\cup B)-P(A)=P(B)\times P\left(\overline{A}\right)\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{P(A\cup B)-P(A)}{P\left(\overline{A}\right)}=P(B)$$

   Como $P\left(A\right)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-0{,}9=0{,}1$, temos que:

$$P(B)=\frac{0{,}73-0{,}1}{0{,}9}=\frac{0{,}63}{0{,}9}=0{,}7$$

   Resposta: **Opção D**

2. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um aluno da turma, e os acontecimentos:
   R:≪O aluno ser uma rapariga≫
   I:≪O ter Inglês≫
   O número de raparigas que tem Inglês é $20-4=16$
   Assim, como a turma tem 18 raparigas, o número de raparigas que não tem Inglês é $18-16=2$
   Logo a probabilidade de selecionar um aluno que não tem inglês, de entre o conjunto das raparigas é

$$P\left(\overline{I}|R\right)=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}$$

   Resposta: **Opção A**

3. Como a soma dos três primeiros elementos de uma linha do triângulo de Pascal é 61 426 e o terceiro elemento dessa linha é 61 075 e, como sabemos que o primeiro é 1, podemos calcular o segundo número (b):

$$61\,426 = 1 + b + 61\,075 \quad\Leftrightarrow\quad 61\,426 - 1 - 61\,075 = b \quad\Leftrightarrow\quad b = 350$$

E assim podemos calcular os primeiros números da linha seguinte ($350+1 = 351$ e $350+61\,075 = 61\,425$):

$$\begin{array}{ccccccccc} & 1 & & 350 & & 61\,075 & & \ldots & \\ 1 & & 351 & & 61\,425 & & \ldots & & \end{array}$$

Como a soma dos últimos três elementos de qualquer linha é igual à soma dos primeiros 3 elementos dessa linha, temos que a soma pretendida é:

$$61\,425 + 351 + 1 = 61\,777$$

Resposta: **Opção C**

4. Se $\lim u_n = k$, então $\lim f(u_n) = 3 \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{x\to k} f(x) = 3$

Calculado $k = \lim u_n$ e $\lim\limits_{x\to k} f(x)$ para cada uma das sucessões apresentadas, temos:

- $\lim u_n = \lim\left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{+\infty} = 2 - 0^+ = 2^-$
  E assim, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (e^x - 1) = e^{2^-} - 1 = e^2 - 1$
- $\lim u_n = \lim\left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2 + \frac{1}{+\infty} = 2 + 0^+ = 2^+$
  E assim, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \left(\frac{4}{x} + 1\right) = \frac{4}{2^+} + 1 = 2 + 1 = 3$
- $\lim u_n = \lim\left(3 - \frac{1}{n}\right) = 3 - \frac{1}{+\infty} = 3 - 0^+ = 3^-$
  E assim, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \left(\frac{4}{x} + 1\right) = \frac{4}{3^-} + 1 = \frac{4}{3} + \frac{3}{3} = \frac{7}{3}$
- $\lim u_n = \lim\left(3 + \frac{1}{n}\right) = 3 + \frac{1}{+\infty} = 3 + 0^+ = 3^+$
  E assim, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \left(\frac{4}{x} + 1\right) = \frac{4}{3^+} + 1 = \frac{4}{3} + \frac{3}{3} = \frac{7}{3}$

Desta forma, de entre as hipóteses apresentadas, a única sucessão em que $\lim f(u_n) = 3$ é $2 + \frac{1}{n}$

Resposta: **Opção B**

5. Podemos descrever a variação do sinal de h', pela análise do gráfico, e relacionar com a monotonia da função h:

x		0	
$h'(x)$	+	0	−
$h(x)$	$\nearrow$	Máx	$\searrow$

Ou seja, a função h é crescente se $x \leq 0$ e decrescente se $x \geq 0$, e apenas o gráfico da opção (D), é compatível com esta conclusão.

Resposta: **Opção D**

6. Como o declive (m), da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1 é $g'(1)$, começamos por determinar a expressão da derivada:

$$g'(x) = \big((2x-1)\times f(x)\big)' = (2x-1)'f(x) + (2x-1)\big(f(x)\big)' = 2f(x) + (2x-1)f'(x)$$

Calculando o declive da reta tangente temos:

$$m = g'(1) = 2f(1) + (2x-1)f'(1) = 2\times 1 + (2(1)-1)\times 1 = 2 + 1\times 1 = 3$$

Calculando as coordenadas do ponto de tangência, temos: $g(1) = (2(1)-1)\times f(1) = (2-1)\times 1 = 1$, ou seja, o ponto $P(1,1)$ é um ponto do gráfico de g que também pertence à reta tangente.
Substituindo o valor do declive na equação da reta, vem $y = 3x + b$
Substituindo as coordenadas do ponto na equação da reta, calculamos o valor da ordenada na origem:

$$1 = 3\times 1 + b \;\Leftrightarrow\; 1-3 = b \;\Leftrightarrow\; -2 = b$$

Logo, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa $x=1$ é:

$$y = 3x - 2$$

Resposta: **Opção A**

7. Usando a fórmula de Moivre para a radiciação temos que:
$\sqrt[6]{z} = \sqrt[6]{8}\,\operatorname{cis}\left(\dfrac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{6}\right)$, $k\in\{0,1,2,3,4,5\}$, temos que

- $|w| = \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$
- Para cada $k\in\{0,1,2,3,4,5\}$, $\arg(w) = \dfrac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{6} = \dfrac{\pi}{36} + \dfrac{2k\pi}{6} = \dfrac{\pi}{36} + \dfrac{12k\pi}{36} = \dfrac{\pi+12k\pi}{36}$

Assim, se $k=2$, temos que $\arg(w) = \dfrac{\pi+24\pi}{36} = \dfrac{25\pi}{36}$

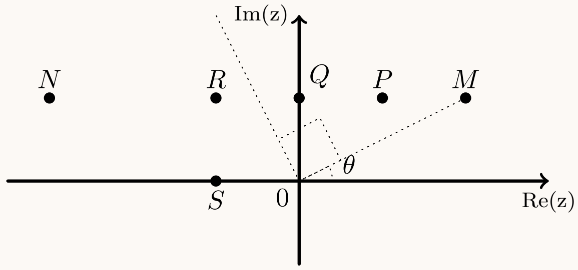
Resposta: **Opção A**

8. Como o ponto M é a imagem geométrica do número complexo z_1 que vamos designar por $z_1 = \rho_1 \operatorname{cis}\theta$, em que $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ porque M é um ponto do primeiro quadrante e $\mathrm{Re}(z_1) > \mathrm{Im}(z_1)$.

- Podemos excluir o ponto da opção (D), o ponto S porque é a imagem geométrica de um número complexo z da forma $z = \rho_3 \operatorname{cis}\pi$, e assim, $z_1 \times z = \rho_1\rho_3 \operatorname{cis}(\pi + \theta)$; e como $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ então a imagem geométrica de $z_1 \times z$ seria um ponto do 3º quadrante e não o ponto N
- Podemos excluir o ponto da opção (B), o ponto Q porque é a imagem geométrica de um número complexo z da forma $z = \rho_4 \operatorname{cis}\frac{\pi}{2}$, e assim, $z_1 \times z = \rho_1\rho_3 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$; ou seja a imagem geométrica de $z_1 \times z$ seria um ponto sobre a reta perpendicular a à reta OM pelo ponto O e não o ponto N
- Podemos excluir o ponto da opção (A), o ponto P porque é a imagem geométrica de um número complexo z da forma $z = \rho_5 \operatorname{cis}\alpha$, e assim, $z_1 \times z = \rho_1\rho_5 \operatorname{cis}(\theta + \alpha)$; e como $\alpha < \frac{\pi}{2}$, então a imagem geométrica de $z_1 \times z$ seria um ponto do quadrante definido pela reta OM e pela perpendicular pelo ponto O e não o ponto N

Logo o ponto R é o único, de entre as opções apresentadas, que pode ser a imagem geométrica do número complexo z_2

Resposta: **Opção C**



GRUPO II

1.

1.1. Resolvendo a equação, vem:

$$z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-1^2 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{3 \times (-1)}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{3} \times \sqrt{-1}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

C.S.: $\left\{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \; ; \; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

Como w é a solução com coeficiente da parte imaginária positivo, $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Escrevendo w na f.t. temos $w = \rho \operatorname{cis}\theta$, onde:

- $\rho = |w| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1$
- $\operatorname{tg}\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$; como $\operatorname{sen}\theta > 0$ e $\cos\theta < 0$, θ é um ângulo do 2º quadrante, logo

  $\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

Assim $z_1 = \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$ e logo $\frac{1}{w} = \frac{1 \operatorname{cis} 0}{\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{1} \operatorname{cis}\left(0 - \frac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

1.2. Seja $z = a + bi$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$.

Assim temos que $\overline{z} = a - bi$, pelo que:
$(\overline{z} + i) \times (z - i) = (a - bi + i)(a + bi - i) = a^2 + abi - ai - abi - b^2i^2 + bi^2 + ai + bi^2 - i^2 =$
$= a^2 - b^2(-1) + b(-1) + b(-1) - (-1) = a^2 + b^2 - 2b + 1$

E como $|z - i|^2 = |a + bi - i|^2 = |a + i(b-1)|^2 = \left(\sqrt{a^2 + (b-1)^2}\right)^2 = a^2 + (b-1)^2 = a^2 + b^2 - 2b + 1$

Temos que $(\overline{z} + i) \times (z - i) = |z - i|^2$

2.

2.1. Como o João escolhe 4 cores de entre um conjunto de 12, e cada cor se destina a pintar uma das faces numeradas, a ordem da seleção é relevante. Assim, o João pode pintar o tetraedro de ${}^{12}A_4$ formas diferentes, sendo este o número de casos possíveis.

Se pretendermos que a cor preferida do João esteja entre as cores escolhidas, ainda podemos pintar qualquer uma das 4 faces com essa cor, pelo que existem 4 casos a considerar.
Por cada um destes 4 casos, devemos selecionar 3 cores de entre as restantes 11, considerando a ordem relevante. Ou seja, o número de casos favoráveis é $4 \times^{11} A_3$

Assim, a probabilidade de o tetraedro ter uma das faces pintadas com a cor preferida do João é

$$\frac{4 \times^{11} A_3}{{}^{12}A_4} = \frac{1}{3}$$

2.2. Como a experiência se repete várias vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades segue o modelo binomial $\left(P(X = k) = {}^nC_k\, p^k\, q^{n-k}\right)$.

Temos que:

- $n = 3$ (o dado é lançado 3 vezes de forma independente).
- $p = \frac{1}{4}$ (a probabilidade do sucesso, ou seja «*Sair a face com o número 1*» é $\frac{1}{4}$, porque o dado tem 4 faces, das quais apenas uma tem o número 1)
- $q = \frac{3}{4}$, a probabilidade do insucesso pode ser calculada como $q = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Assim, calculando a probabilidade da face com o número 1, ocorrer 0,1,2 ou 3 vezes, temos:

- $P(X = 0) = {}^3C_0 \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 1 \times 1 \times \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}$
- $P(X = 1) = {}^3C_1 \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{3^2}{4^2} = \frac{3 \times 1 \times 3^2}{4^3} = \frac{27}{64}$
- $P(X = 2) = {}^3C_2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^1 = 3 \times \frac{1}{4^2} \times \frac{3}{4} = \frac{3 \times 1 \times 3}{4^3} = \frac{9}{64}$
- $P(X = 3) = {}^3C_3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1 \times \frac{1}{4^3} \times 1 = \frac{1}{64}$

Logo a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

2.3. No contexto da situação descrita, $P(J|I)$ é a probabilidade de que ao lançar 4 vezes o tetraedro, a soma dos números registados nos quatro lançamentos seja menor do que 10, sabendo que nos 3 primeiros lançamentos saiu sempre o número dois.
Como sabemos que a soma relativa aos 3 primeiros lançamentos é $2+2+2=6$, para que a soma dos 4 lançamentos seja inferior a 10, no último lançamento podem sair as faces com os números, um (que resultará na soma 7), dois (soma 8) ou três (soma 9).
Assim, usando a Regra de Laplace, para a determinação da probabilidade, temos 4 casos possíveis, correspondentes às faces que podem sair no quarto lançamento, e 3 casos favoráveis, correspondendo às faces que correspondem a uma soma inferior a 10, pelo que

$$P(J|I) = \frac{3}{4}$$

3.

3.1. Sabendo que $M = 7{,}1$, podemos calcular a energia sísmica irradiada, substituindo o valor dado em $M = \frac{2}{3}\log_{10}(E) - 2{,}9$:

$$7{,}1 = \frac{2}{3}\log_{10}(E) - 2{,}9 \Leftrightarrow \frac{(7{,}1+2{,}9)\times 3}{2} = \log_{10}(E) \Leftrightarrow \log_{10}(E) = 15 \Leftrightarrow E = 10^{15}$$

Como a relação entre o momento sísmico e a energia libertada é $E = M_0 \times 1{,}6 \times 10^{-5}$, substituindo o valor de E nesta expressão, vem:

$$10^{15} = M_0 \times 1{,}6 \times 10^{-5} \Leftrightarrow \frac{10^{15}}{1{,}6\times 10^{-5}} = M_0 \Leftrightarrow M_0 = 0{,}625 \times 10^{15} \times 10^{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M_0 = 6{,}25 \times 10^{-1} \times 10^{20} \Leftrightarrow M_0 = 6{,}25 \times 10^{19}$$

3.2. Sabemos que $M_1 - M_2 = \frac{2}{3}$.
Sejam E_1 a energia sísmica irradiada pelo sismo de magnitude M_1 e E_2 a energia sísmica irradiada pelo sismo de magnitude M_2.
Assim, temos que $M_1 = \frac{2}{3}\log_{10}(E_1) - 2{,}9$ e $M_2 = \frac{2}{3}\log_{10}(E_2) - 2{,}9$, pelo que
$M_1 - M_2 = \frac{2}{3}\log_{10}(E_1) - 2{,}9 - \left(\frac{2}{3}\log_{10}(E_2) - 2{,}9\right)$
Logo:

$$\frac{2}{3}\log_{10}(E_1) - 2{,}9 - \left(\frac{2}{3}\log_{10}(E_2) - 2{,}9\right) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3}\log_{10}(E_1) - 2{,}9 - \frac{2}{3}\log_{10}(E_2) + 2{,}9 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\log_{10}(E_1) - \frac{2}{3}\log_{10}(E_2) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3}\Big(\log_{10}(E_1) - \log_{10}(E_2)\Big) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \log_{10}(E_1) - \log_{10}(E_2) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{10}\left(\frac{E_1}{E_2}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{E_1}{E_2} = 10^1 \Leftrightarrow E_1 = 10 \times E_2$$

Assim, a energia sísmica irradiada pelo sismo de magnitude M_1 é dez vezes superior à energia sísmica irradiada pelo sismo de magnitude M_2.

4.

4.1. Sabendo que f é contínua em $x=1$, temos que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$, e mais especificamente que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$
Como $f(1) = -1 + \ln 1 = -1 + 0 = -1$, vamos calcular $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ para determinar o valor de k :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(k + \frac{1-e^{x-1}}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1^-} k + \lim_{x\to 1^-} \frac{1-e^{x-1}}{x-1} = k + \lim_{x\to 1^-} \frac{-(e^{x-1}-1)}{x-1} =$$

$$= k - \lim_{x\to 1^-} \frac{e^{x-1}-1}{x-1} \underset{(1)}{=} k - \underbrace{\lim_{y\to 0^-} \frac{e^y-1}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = k-1$$

(1) Se $y = x-1$, então como $x \to 1^-$, logo $y \to 0^-$

Assim, como f é contínua em $x=1$ temos que $f(1) = k-1$, ou seja

$$-1 = k-1 \Leftrightarrow k = 0$$

4.2. Para averiguar a existência de assíntotas horizontais do gráfico de f temos que calcular $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

Assim temos que:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \left(3 + \frac{1-e^{x-1}}{x-1}\right) = \lim_{x\to -\infty} 3 + \lim_{x\to -\infty} \frac{1-e^{x-1}}{x-1} = 3 + \frac{1-e^{-\infty-1}}{-\infty-1} = 3 + \frac{1-0}{-\infty} = 3-0 = 3$$

Pelo que podemos afirmar que a reta de equação $y=3$ é assíntota do gráfico de f (quando $x \to -\infty$)

Temos ainda que:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} (-x + \ln x) = \lim_{x\to +\infty} \left(x\left(-1 + \frac{\ln x}{x}\right)\right) = \lim_{x\to +\infty} x \times \lim_{x\to +\infty} \left(-1 + \frac{\ln x}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} x \times \left(\lim_{x\to +\infty} (-1) + \underbrace{\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}\right) = +\infty \times (-1+0) = +\infty \times (-1) = -\infty$$

Pelo que podemos afirmar que o gráfico de f não tem assíntotas horizontais quando $x \to +\infty$, ou seja, $y = 3$ é a única assíntota horizontal do gráfico de f

5. Como se pretende determinar os extremos da função, vamos recorrer aos zeros da derivada, e por isso, começamos por derivar a função:

$$g'(x) = (x - 2\cos x)' = (x)' - (2\cos x)' = 1 - 2(-\operatorname{sen} x) = 1 + 2\operatorname{sen} x$$

Depois determinamos os zeros da derivada, ou seja as abcissas dos pontos C e D:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \lor \ x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi \, , k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \lor \ x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \, , k \in \mathbb{Z}$$

Atribuindo valores inteiros a k, podemos encontrar os valores de x que pertencem ao domínio da função:

$$x = -\frac{\pi}{6} \ (k = 0) \ \text{ e } \ x = -\frac{5\pi}{6} \left(k = -1, x = \frac{7\pi}{6} - 2\pi\right)$$

Assim, estudando a variação de sinal de g' e relacionando com a monotonia da função g, vem:

x	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$	n.d.	+	0	−	0	+	n.d.
$g(x)$	n.d.	↗	Máx	↘	min	↗	n.d.

Assim, temos que a abcissa do ponto C é $x_C = -\frac{5\pi}{6}$, e a ordenada é

$$g\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi}{6} - 2\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi}{6} - 2\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6} - 2\left(-\cos\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi}{6} - 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} - \frac{5\pi}{6}$$

Ou seja, o ponto C tem coordenadas $C\left(-\frac{5\pi}{6}, \sqrt{3} - \frac{5\pi}{6}\right)$

De forma análoga, temos que a abcissa do ponto D é $x_D = -\frac{\pi}{6}$, e a ordenada é

$$g\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6} - 2\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6} - 2\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}$$

Ou seja, o ponto D tem coordenadas $D\left(-\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}\right)$

6. Considerando a abcissa x do ponto A, como a medida do lado horizontal do retângulo e a medida (correspondente) do lado vertical é $f(x)$, ou seja, a área $A_{[OACB]}$ é dada pela função g definida, pela condição:

$$g(x) = x \times f(x) = x\left(2 + 15\ln\left(3 - \frac{1}{2}x\right)\right) \, , (g(x) \geq 0)$$

Traçando na calculadora gráfica o gráfico da função g, numa janela compatível com o domínio, obtemos o gráfico reproduzido na figura ao lado.

Utilizando a função da calculadora gráfica que permite determinar valores aproximados para o maximizante (e para o máximo) da função, determinamos as coordenadas do ponto $M(2{,}47; 25{,}99)$, o que nos permite concluir que o retângulo $[OACB]$ tem área máxima quando o ponto A (e o ponto C) tem abcissa $x \approx 2{,}5$