
Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/1.ª Fase – Prova Especial

14 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2011

Página em branco

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de escolha múltipla, escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

A prova inclui, na página 4, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$

(α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$

(r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$

(r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Trigonometria

$\text{sen}(a + b) = \text{sen} a \cdot \text{cos} b + \text{sen} b \cdot \text{cos} a$

$\text{cos}(a + b) = \text{cos} a \cdot \text{cos} b - \text{sen} a \cdot \text{sen} b$

$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg} a + \text{tg} b}{1 - \text{tg} a \cdot \text{tg} b}$

Complexos

$(\rho \text{cis } \theta)^n = \rho^n \text{cis}(n\theta)$

$n\sqrt{\rho \text{cis } \theta} = n\sqrt{\rho} \text{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), k \in \{0, \dots, n-1\}$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen } u)' = u' \cdot \text{cos } u$

$(\text{cos } u)' = -u' \cdot \text{sen } u$

$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\text{cos}^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, selecione a única opção correcta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- $P(\bar{A}) = 0,9$
- $P(A \cup B) = 0,73$
- A e B são acontecimentos independentes

Qual é o valor de $P(B)$?

- (A) 0,63 (B) 0,657 (C) 0,073 (D) 0,7

2. Uma turma do 12.º ano de uma escola secundária tem 18 raparigas e 10 rapazes. Nessa turma, 20 alunos têm Inglês. Dos alunos da turma que têm Inglês só 4 são rapazes.

Escolhe-se, ao acaso, um aluno dessa turma.

Qual é a probabilidade de o aluno escolhido não ter Inglês, sabendo que é rapariga?

- (A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{2}{9}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{1}{4}$

3. O terceiro elemento de uma linha do triângulo de Pascal é 61 075

A soma dos três primeiros elementos dessa linha é 61 426

Qual é a soma dos três últimos elementos da linha seguinte?

(A) 61 425

(B) 61 426

(C) 61 777

(D) 122 501

4. Considere a função f , de domínio $]0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ \frac{4}{x} + 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Seja (u_n) uma sucessão de números reais, de termos positivos, tal que $\lim f(u_n) = 3$

Qual das expressões seguintes pode definir o termo geral da sucessão (u_n) ?

(A) $2 - \frac{1}{n}$

(B) $2 + \frac{1}{n}$

(C) $3 - \frac{1}{n}$

(D) $3 + \frac{1}{n}$

5. Na Figura 1, está representada, num referencial o. n. xOy , parte do gráfico de uma função h' , primeira derivada de h

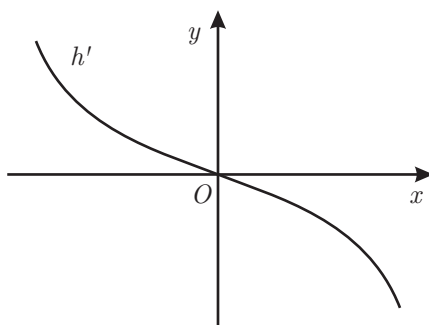
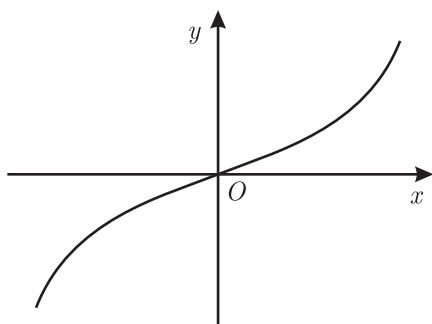


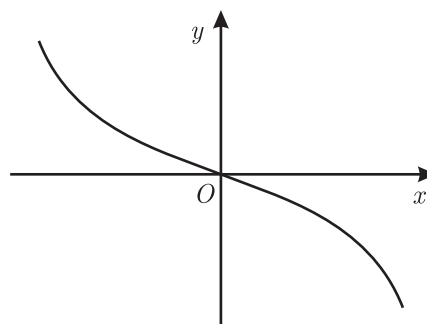
Figura 1

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função h ?

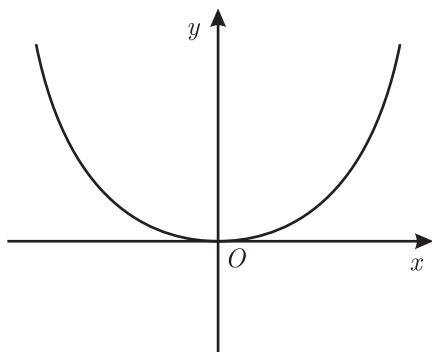
(A)



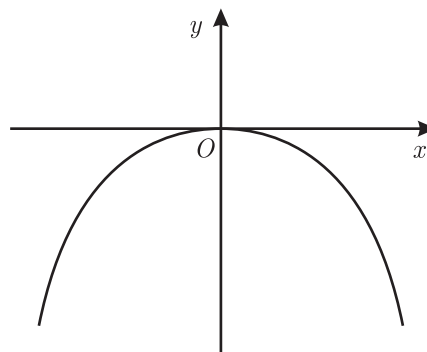
(B)



(C)



(D)



6. Sejam f e g duas funções deriváveis em \mathbb{R}

Sabe-se que:

- $f(1) = f'(1) = 1$
- $g(x) = (2x - 1) \times f(x)$, para todo o valor real de x

Qual é a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1?

(A) $y = 3x - 2$

(B) $y = 3x + 4$

(C) $y = 2x - 1$

(D) $y = -3x + 2$

7. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, considere $z = 8 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Qual dos números complexos seguintes é uma das raízes de índice seis de z ?

(A) $\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{25\pi}{36}\right)$

(B) $\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{36}\right)$

(C) $2\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{25\pi}{36}\right)$

(D) $2\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{36}\right)$

8. Na Figura 2, estão representados, no plano complexo, seis pontos, M , N , P , Q , R e S

Sabe-se que:

- o ponto M é a imagem geométrica do número complexo $z_1 = 2 + i$
- o ponto N é a imagem geométrica do número complexo $z_1 \times z_2$

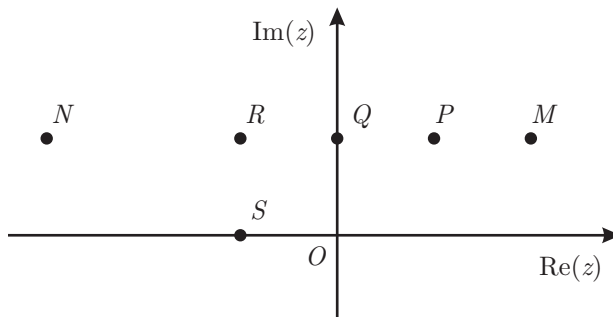


Figura 2

Qual dos pontos seguintes pode ser a imagem geométrica do número complexo z_2 ?

- (A) ponto P
- (B) ponto Q
- (C) ponto R
- (D) ponto S

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

1.1. Seja w o número complexo com coeficiente da parte imaginária positivo que é solução da equação $z^2 + z + 1 = 0$

Determine $\frac{1}{w}$

Apresente o resultado na forma trigonométrica.

1.2. Seja z um número complexo.

Mostre que $(\bar{z} + i) \times (z - i) = |z - i|^2$, para qualquer número complexo z

(\bar{z} designa o conjugado de z)

2. Na Figura 3, está representado um tetraedro com as faces numeradas de 1 a 4

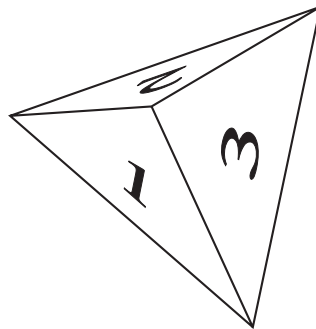


Figura 3

2.1. O João tem um catálogo de tintas com 12 cores diferentes, uma das quais é a sua preferida.

O João selecciona, ao acaso, 4 cores diferentes para pintar as quatro faces do tetraedro.

Cada uma das faces é pintada com uma única cor.

Determine a probabilidade de o tetraedro ter uma das faces pintadas com a cor preferida do João.

Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

- 2.2.** Considere a experiência aleatória que consiste em lançar 3 vezes o tetraedro representado na Figura 3 e registar, em cada lançamento, o número inscrito na face voltada para baixo.

Seja X a variável aleatória «número de vezes que, nesses três lançamentos do tetraedro, se regista o número 1».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X

Apresente as probabilidades na forma de fracção.

- 2.3.** Considere, agora, a experiência aleatória que consiste em lançar 4 vezes o tetraedro representado na Figura 3 e registar, em cada lançamento, o número inscrito na face voltada para baixo.

Sejam I e J os acontecimentos seguintes.

I : «o número registado nos três primeiros lançamentos do tetraedro é o número 2»;

J : «a soma dos números registados nos quatro lançamentos do tetraedro é menor do que 10».

Indique o valor de $P(J|I)$ sem aplicar a fórmula da probabilidade condicionada.

Numa composição, explique o seu raciocínio, começando por referir o significado de $P(J|I)$ no contexto da situação descrita.

- 3.** O momento sísmico, M_0 , é uma medida da quantidade total de energia que se transforma durante um sismo. Só uma pequena fracção do momento sísmico é convertida em energia sísmica irradiada, E , que é a que os sismógrafos registam.

A energia sísmica irradiada é estimada, em Joules, por $E = M_0 \times 1,6 \times 10^{-5}$

A magnitude, M , de um sismo é estimada por $M = \frac{2}{3} \log_{10}(E) - 2,9$

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

- 3.1.** Admita que um sismo que ocorreu no Haiti, em 2010, teve magnitude 7,1

Determine o momento sísmico, M_0 , para esse sismo.

Escreva o resultado na forma $a \times 10^n$, com n inteiro relativo e com a entre 1 e 10

- 3.2.** Sejam M_1 e M_2 as magnitudes de dois sismos.

Mostre que, se a diferença entre a magnitude M_1 e a magnitude M_2 é igual a $\frac{2}{3}$, então a energia sísmica irradiada por um dos sismos é dez vezes superior à energia sísmica irradiada pelo outro sismo.

4. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por

$$f(x) = \begin{cases} k + \frac{1 - e^{x-1}}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ -x + \ln x & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \quad (k \text{ designa um número real})$$

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

4.1. Determine k , sabendo que f é contínua em $x = 1$

4.2. Considere, agora, $k = 3$

Estude a função f quanto à existência de assíntotas horizontais do gráfico de f

5. Na Figura 4, está representado, num referencial o. n. xOy , o gráfico da função g , de domínio $\left]-\pi, \frac{\pi}{2}\right[$, definida por $g(x) = x - 2 \cos x$

Sabe-se que C e D são pontos do gráfico de g cujas ordenadas são extremos relativos de g

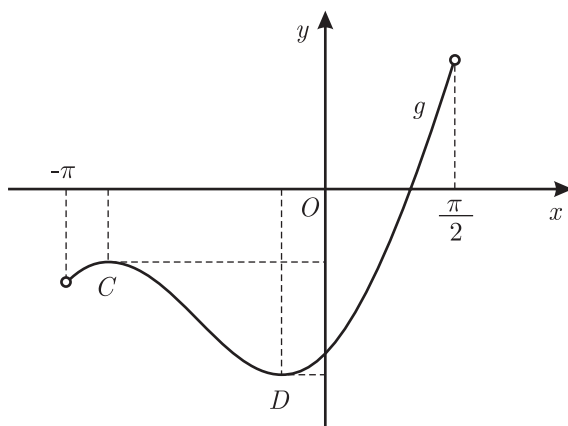


Figura 4

Determine os valores exactos das coordenadas dos pontos C e D recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

6. Na Figura 5, está representada, num referencial o. n. xOy , parte do gráfico da função f , de domínio $]-\infty, 6[$, definida por $f(x) = 2 + 15 \ln\left(3 - \frac{1}{2}x\right)$

Considere que um ponto C se desloca ao longo do gráfico de f , e que C tem coordenadas positivas.

Para cada posição do ponto C , considere o rectângulo $[OACB]$, em que o ponto A pertence ao eixo das abcissas e o ponto B pertence ao eixo das ordenadas.

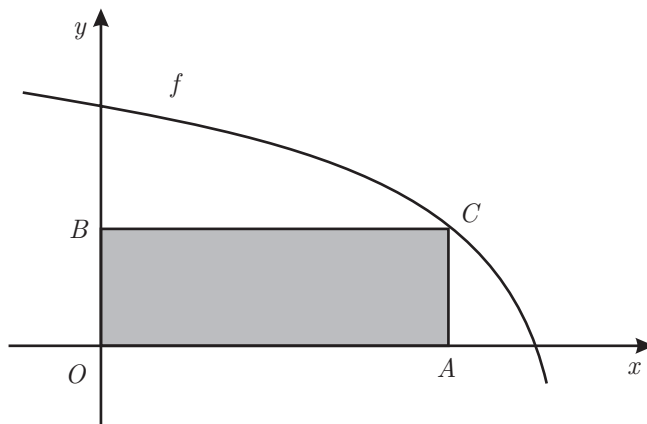


Figura 5

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto A para a qual a área do rectângulo $[OACB]$ é máxima.

Na sua resposta, deve:

- escrever a expressão que dá a área do rectângulo $[OACB]$ em função da abcissa do ponto A ;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar a abcissa do ponto A com arredondamento às centésimas.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

| | |
|--------------------------|------------------|
|(8 × 5 pontos)..... | 40 pontos |
| | <hr/> |
| | 40 pontos |

GRUPO II

| | | |
|------|-------|-------------------|
| 1. | | |
| 1.1. | | 15 pontos |
| 1.2. | | 15 pontos |
| 2. | | |
| 2.1. | | 10 pontos |
| 2.2. | | 15 pontos |
| 2.3. | | 15 pontos |
| 3. | | |
| 3.1. | | 15 pontos |
| 3.2. | | 15 pontos |
| 4. | | |
| 4.1. | | 15 pontos |
| 4.2. | | 15 pontos |
| 5. | | 15 pontos |
| 6. | | 15 pontos |
| | | <hr/> |
| | | 160 pontos |

TOTAL **200 pontos**