Exame nacional de Matemática A **(2011, 2.ª fase)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Como no lote existem em total de 30 caixas, ao selecionar 4, podemos obter um conjunto de $^{30}C_4$ amostras diferentes, ou seja, $^{30}C_4$ casos possíveis.
   O número de casos favoráveis corresponde a todos os lotes de 4 caixas do medicamento Y, ou seja conjuntos de 4 caixas escolhidas de entre as 20 caixas de medicamento Y, ou seja, $^{20}C_4$ hipóteses.
   Assim, a probabilidade de selecionar um lote 4 as caixas e serem todas do medicamento Y é $\frac{^{20}C_4}{^{30}C_4}$

   Resposta: **Opção B**

2. Como $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 2a + a = 3a$ e $P(X = 5) = \frac{1}{10}$, temos que:

   $$P(X \leq 1) = 3P(X = 5) \;\Leftrightarrow\; 3a = 3 \times \frac{1}{10} \;\Leftrightarrow\; a = \frac{1}{10}$$

   Também sabemos que:

   $$2a + a + b + b + b + \frac{1}{10} = 1 \;\Leftrightarrow\; 3a + 3b = 1 - \frac{1}{10} \;\Leftrightarrow\; 3a + 3b = \frac{10}{10} - \frac{1}{10} \;\Leftrightarrow\; 3a + 3b = \frac{9}{10}$$

   Substituindo o valor de a, temos:

   $$3 \times \frac{1}{10} + 3b = \frac{9}{10} \;\Leftrightarrow\; 3b = \frac{9}{10} - \frac{3}{10} \;\Leftrightarrow\; 3b = \frac{6}{10} \;\Leftrightarrow\; b = \frac{\frac{6}{10}}{3} \;\Leftrightarrow\; b = \frac{6}{30} \;\Leftrightarrow\; b = \frac{1}{5}$$

   Resposta: **Opção D**

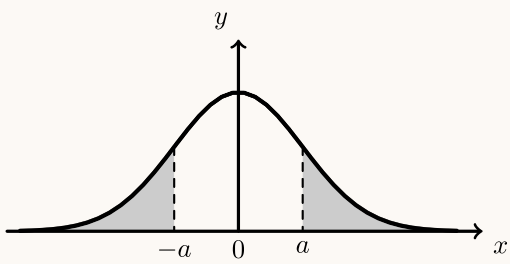
3. Como $a \in \mathbb{R}^+$, e a variável X segue uma distribuição normal, com $\mu = 0$, sabemos que a distribuição é simétrica relativamente à reta $x = 0$.
   Assim, como $P(X \geq 0) = P(X \leq 0) = 0{,}5$, temos que:

   - Como $a > 0$, então $P(X \geq a) < 0{,}5$, logo $P(X \leq -a) < 0{,}5$
   - $P(X \leq a) = 1 - P(X \geq a)$, pelo que, $P(X \leq a) > 0{,}5$ e também $P(X \geq -a) > 0{,}5$

   Desta forma podemos afirmar que:

   - $P(X \leq a) + P(X \geq -a) > 0$
   - $P(X \leq a) + P(X \geq -a) < 1$
   - $P(X \leq a) > P(X \geq a)$

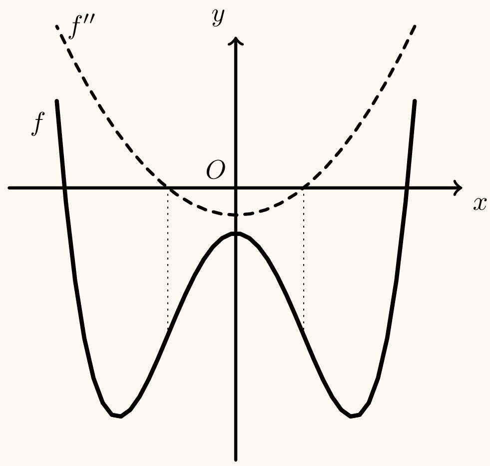
   Como a distribuição é simétrica e a e $-a$ são valores equidistantes do valor médio, temos que $P(X \leq a) = P(X \geq -a)$



   Resposta: **Opção B**

4. Os gráficos das funções apresentadas nas opções (A) e (B) são parábolas cujo vértice está sobre o eixo das abcissas, ou seja, ambas têm um zero, mas que não está associado a uma mudança de sinal, pelo que, cada uma destas funções é a segunda derivada de uma função sem pontos de inflexão, e pela observação do gráfico, podemos constatar que a função f tem dois pontos de inflexão, pelo que nenhuma destas opções é correta.

   O gráfico da função da opção (C), é uma parábola com dois zeros simétricos, e por isso coerente com os pontos de inflexão observados no gráfico de f, mas esta função é negativa quando o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima, e é positiva quando o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo, pelo que, esta também não é a opção correta.



   Resposta: **Opção D**

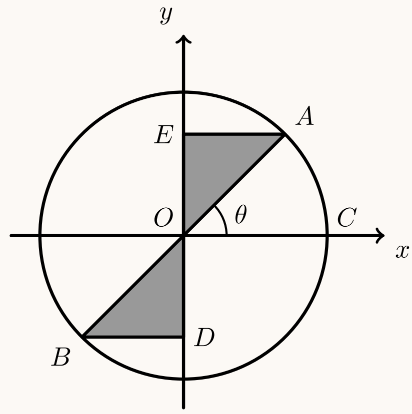
5. Como a função g é contínua, é contínua em $x = 0$, ou seja, verifica a condição: $g(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$
   Assim, temos que:

   - $g(0) = \ln(k - 0) = \ln k$
   - $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (\ln(k - x)) = \ln k$
   - $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{3x} = \dfrac{1}{3} \underbrace{\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = \dfrac{1}{3} \times 1 = \dfrac{1}{3}$

   Logo, temos que: $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) \Leftrightarrow \ln k = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow k = e^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow k = \sqrt[3]{3}$

   Resposta: **Opção A**

6. Como $\overline{OA} = 1$, usando as definições de seno e cosseno temos:



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\overline{OE}}{\overline{OA}} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{\overline{OE}}{1} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{OE} = \operatorname{sen}\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\overline{EA}}{\overline{OA}} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\theta = \frac{\overline{EA}}{1} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{EA} = \cos\theta$$

E assim, o perímetro da região sombreada é:

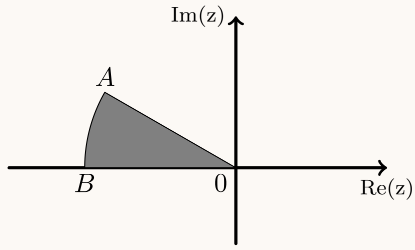
$$P_{[ABDE]} = \overline{AO} + \overline{OB} + \overline{BD} + \overline{DO} + \overline{OE} + \overline{EA}$$

Como $\overline{AO} = \overline{OB}$; $\overline{BD} = \overline{EA}$ e $\overline{DO} = \overline{OE}$, temos:

$$P_{[ABDE]} = 2\overline{AO} + 2\overline{EA} + 2\overline{OE} = 2 \times 1 + 2\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta = 2(1 + \cos\theta + \operatorname{sen}\theta)$$

Resposta: **Opção C**

7. A região apresentada na figura é definida pelo interior da circunferência de centro na origem e raio $\overline{OA}$ e pelo conjuntos de pontos que representam números complexos com argumentos compreendidos entre $\arg(-\sqrt{3} + i)$ e π. Assim temos que $\overline{OA} = |-\sqrt{3} + i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^{+}1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$



E, sendo $\theta = \arg(-\sqrt{3} + i)$, vem que:

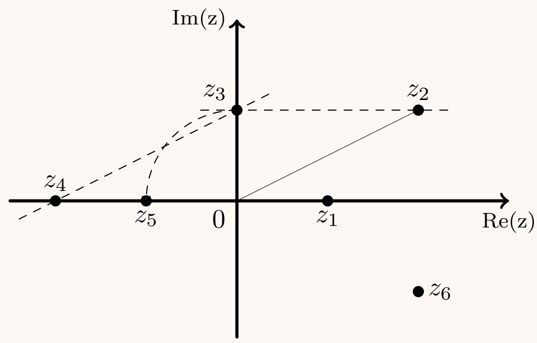
$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{1}{-\sqrt{3}} = -\dfrac{1 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, como $\operatorname{sen}\theta > 0$ e $\cos\theta < 0$, θ é um ângulo do 2º quadrante,

logo $\theta = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{6\pi}{6} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$

Desta forma $|z| < |-\sqrt{3} + i| \wedge \arg(-\sqrt{3} + i) \leq \arg(z) \leq \pi \quad \Leftrightarrow \quad |z| \leq 2 \wedge \dfrac{5\pi}{6} \leq \arg(z) \leq \pi$

Resposta: **Opção B**

8. Pela observação da figura podemos adicionar geometricamente os afixos de z_2 e de z_4 e temos que $z_2 + z_4 = z_3$



A operação "*multiplicar por i*" corresponde geometricamente a "fazer uma rotação de centro em O e amplitude $\frac{\pi}{2}$", pelo que $z_3 \times i = z_5$.

Logo $(z_2 + z_4) \times i = z_3 \times i = z_5$.

Resposta: **Opção C**

GRUPO II

1.

1.1. Como $i^{4n+3} = i^3 = -i$, vem que:
$z_1 \times i^{4n+3} - b = (1+2i)(-i) - b = -i - 2i^2 - b = -i - 2(-1) - b = 2 - b - i$

E como:
$\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{4} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -1 - i$

Logo temos que:

$$w = \frac{z_1 \times i^{4n+3} - b}{\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)} = \frac{2-b-i}{-1-i} = \frac{(2-b-i)(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)} = \frac{-2+b+i+2i-bi-i^2}{(-1)^2-i^2} =$$
$$= \frac{-2+b+3i-bi-(-1)}{1-(-1)} = \frac{-2+1+b+i(3-b)}{1+1} = \frac{-1+b+i(3-b)}{2} = \frac{-1+b}{2} + \frac{3-b}{2}i$$

Assim para que w seja um número real, $\operatorname{Im}(w) = 0$, ou seja:

$$\operatorname{Im}(w) = 0 \Leftrightarrow \frac{3-b}{2} = 0 \Leftrightarrow 3 - b = 0 \Leftrightarrow 3 = b$$

1.2. Seja $z = a + bi$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$.
Temos que:

- $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$, pelo que se $|z| = 1$ então:

  $\sqrt{a^2+b^2} = 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = 1^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$
- $|1+z|^2 = |1+a+bi|^2 = \left(\sqrt{(1+a)^2+b^2}\right)^2 = \left(\sqrt{1+2a+a^2+b^2}\right)^2 = 1+2a+a^2+b^2$
- $|1-z|^2 = |1-a-bi|^2 = \left(\sqrt{(1-a)^2+(-b)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{1-2a+a^2+b^2}\right)^2 = 1-2a+a^2+b^2$

Assim temos que:
$|1+z|^2 + |1-z|^2 = 1+2a+a^2+b^2+1-2a+a^2+b^2 = 2+2a^2+2b^2 = 2+2\left(a^2+b^2\right) = 2+2(1) = 4$

2.

2.1. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher ao acaso um funcionário da empresa, e os acontecimentos:
L:≪O funcionário é licenciado≫
Q:≪O funcionário tem idade não inferior a 40 anos≫
Temos que $P(L) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$, $P\left(\overline{Q}|L\right) = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$ e $P\left(\overline{Q}|\overline{L}\right) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P\left(L \cap \overline{Q}\right) = P\left(L\right) \times P\left(\overline{Q}|L\right) = \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{25}$
- $P\left(\overline{L}\right) = 1 - P(L) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$
- $P\left(\overline{L} \cap \overline{Q}\right) = P\left(\overline{L}\right) \times P\left(\overline{Q}|\overline{L}\right) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{10} = \frac{2}{50} = \frac{1}{25}$
- $P\left(\overline{Q}\right) = P\left(L \cap \overline{Q}\right) + P\left(\overline{L} \cap \overline{Q}\right) = \frac{12}{25} + \frac{1}{25} = \frac{13}{25}$
- $P(L \cap Q) = P(L) - P\left(L \cap \overline{Q}\right) = \frac{3}{5} - \frac{12}{25} = \frac{3}{25}$
- $P(Q) = 1 - P\left(\overline{L}\right) = 1 - \frac{13}{25} = \frac{12}{25}$

	L	$\overline{L}$	
Q	$\frac{3}{25}$		$\frac{12}{25}$
$\overline{Q}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{13}{25}$
	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

Assim, calculando a probabilidade de, ao escolher, ao acaso, um funcionário desta empresa e ele ser licenciado, sabendo que tem uma idade não inferior a 40 anos, e escrevendo o resultado na forma de fração irredutível, temos:

$$P(L|Q) = \frac{P(L \cap Q)}{P(Q)} = \frac{\frac{3}{25}}{\frac{12}{25}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

2.2. A resposta correta é a **Resposta II**.
Relativamente a esta resposta, o número de formas diferentes de escolher os 3 funcionários, de forma que pelo menos 2 dos funcionários escolhidos estejam a favor do novo horário de trabalho, é calculado como a soma dos números de casos de duas situações distintas:
- 2 dos 3 funcionários escolhidos são favoráveis à alteração, ou seja, escolher 1 funcionário de entre os 6 que não estão no grupo dos que são favoráveis, e por cada uma das 6 escolhas possíveis, escolher um conjunto de 2 de entre os 9 trabalhadores que são favoráveis ($6 \times {}^9C_2$);
- escolher 3 trabalhadores que sejam favoráveis à alteração, ou seja, escolher um grupo de 3, do conjunto de 9 trabalhadores que são favoráveis (${}^9C_3$).

Outra forma de fazer este cálculo, consiste em subtrair ao total dos conjuntos de 3 trabalhadores que podemos fazer com os 15 funcionários (${}^{15}C_3$), o número de grupos onde nenhum trabalhador é favorável à alteração, ou apenas 1 é favorável à alteração.
Observando a Resposta I, podemos identificar este raciocínio, embora tenham sido subtraídos apenas os conjuntos em que nenhum trabalhador é favorável (${}^6C_3$, que consiste em calcular o número de conjuntos de 3 que podemos fazer com os 6 trabalhadores que não estão no grupo dos que são favoráveis). Assim, para que o cálculo fique correto, deve ser ainda subtraído o número ${}^6C_2 \times 9$, ou seja, o número de conjuntos em que são escolhidos 2 de entre os 6 trabalhadores que não estão no grupo dos que são favoráveis e um terceiro trabalhador do grupo dos 9 apoiantes da alteração.
Desta forma, alterando a Resposta I para: ${}^{15}C_3 - {}^6C_3 - {}^6C_2 \times 9$, obtemos outra resposta correta.

3.

3.1. Começamos por calcular o número de nenúfares, às zero horas do dia 1 de Março de 2010, no lago A, ou seja, aos zero dias:

$$N_A(0) = \frac{120}{1 + 7 \times e^{-0{,}2\times 0}} = \frac{120}{1 + 7 \times e^{0}} = \frac{120}{1 + 7 \times 1} = \frac{120}{8} = 15$$

Calculando o número aproximado de nenúfares, no lago A, 7 dias depois, temos:

$$N_A(7) = \frac{120}{1 + 7 \times e^{-0{,}2\times 7}} = \frac{120}{1 + 7 \times e^{-1{,}4}} \approx 44{,}02$$

Assim temos que o aumento do número de nenúfares, no lago A, nos primeiros 7 dias, arredondado às unidades é

$$N_A(7) - N_A(0) \approx 44{,}02 - 15 \approx 29 \text{ nenúfares}$$

3.2. O número de dias necessários, após as zero horas do dia 1 de Março de 2010, para que o número de nenúfares existentes no lago A seja igual ao número de nenúfares existentes no lago B é a solução da equação $N_A(t) = N_B(t)$:

$$N_A(t) = N_B(t) \Leftrightarrow \frac{120}{1+7\times e^{-0,2t}} = \frac{150}{1+50\times e^{-0,4t}} \Leftrightarrow 120\left(1+50\times e^{-0,4t}\right) = 150\left(1+7\times e^{-0,2t}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 120+6000\times e^{-0,4t} = 150+1050\times e^{-0,2t}\ \Leftrightarrow\ 6000\times e^{-0,4t} - 1050\times e^{-0,2t} + 120 - 150 = 0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 6000\times\left(e^{-0,2t}\right)^2 - 1050\times e^{-0,2t} - 30 = 0\ \Leftrightarrow$$

Fazendo a substituição de variável $y = e^{-0,2t}$, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$\Leftrightarrow\ 6000y^2 - 1050y - 30 = 0\ \Leftrightarrow\ y = \frac{1050 \pm \sqrt{(-1050)^2 - 4(6000)(-30)}}{2(6000)}\ \Leftrightarrow\ y = \frac{1050\pm 1350}{12\,000}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ y = -\frac{1}{40}\ \vee\ y = \frac{1}{5}$$

Como $y = e^{-0,2t}$, temos que:

$$e^{-0,2t} = -\frac{1}{40}\ \vee\ e^{-0,2t} = \frac{1}{5}$$

E como a equação $e^{-0,2t} = -\frac{1}{40}$ é impossível, podemos determinar única solução da equação:

$$e^{-0,2t} = \frac{1}{5}\ \Leftrightarrow\ -0,2t = \ln\left(\frac{1}{5}\right)\ \Leftrightarrow\ t = \frac{\ln 1 - \ln 5}{-0,2}\ \Leftrightarrow\ t = \frac{0-\ln 5}{-0,2}\ \Leftrightarrow\ t = \frac{\ln 5}{0,2}$$

Assim, arredondando o resultado às unidades, temos $t \approx 8$ dias

4. Sabemos que o declive da reta tangente ao gráfico de f, no ponto B, é 8, porque a tangente a uma reta de declive 8.

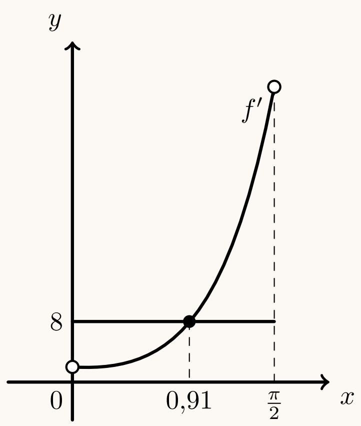
Por outro lado o declive (m) da reta tangente em qualquer ponto é $m = f'(x)$, pelo que é necessário determinar a derivada de f:

$$f'(x) = (e^{2x} + \cos x - 2x^2)' = (e^{2x})' + (\cos x)' - (2x^2)' = 2e^{2x} - \operatorname{sen} x - 4x$$

Assim, como $m = f'(x)$ e $m = 8$, temos que a abcissa do ponto B é a solução da equação:

$$f'(x) = 8\ \ \Leftrightarrow\ \ 2e^{2x} - \operatorname{sen} x - 4x = 8$$

Logo, podemos traçar na calculadora o gráfico da função f' e a reta de equação $y = 8$ numa janela compatível com o domínio de f (que coincide com o domínio de f'), que se reproduz na figura ao lado.



Recorrendo à função da calculadora que permite determinar valores aproximados de um ponto de interseção de dois gráficos, determinamos o valor da abcissa (com aproximação às centésimas) do ponto do gráfico de f' que tem ordenada 8, ou seja a abcissa do ponto B:

$$x \approx 0,91$$

5.

5.1. Como a função f resulta de operações entre funções contínuas, em $[0,2[$ e em $[2,+\infty[$ é contínua em $[0,2[$ e em $[2,+\infty[$, e como o seu domínio é $[0+\infty[$, então a única reta que pode ser assíntota vertical do gráfico de f é a reta de equação $x=2$

Para averiguar se a reta de equação $x=2$ é assíntota do gráfico de f, vamos calcular $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{e^{2-x}-1}{x-2} = \frac{e^{2-2^-}-1}{2^- - 2} = \frac{e^0-1}{0} = \frac{0}{0} \quad \text{(Indeterminação)}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{e^{2-x}-1}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{e^{2-x}-1}{-(-x+2)} = \lim_{x\to 2^-} \left(-\frac{e^{2-x}-1}{2-x}\right) = -\lim_{x\to 2^-} \frac{e^{2-x}-1}{2-x}$$

(fazendo $y=2-x$, temos que se $x\to 2^-$, então $y\to 0^+$)

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\underbrace{\lim_{y\to 0^+} \frac{e^y-1}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = -1$$

Assim, como $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ é uma valor finito, concluímos que a reta de equação $x=2$ não é assíntota vertical do gráfico de f (e que não existe qualquer outra assíntota vertical).

5.2.

Como a função f resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $[0,2[$, é contínua em $[0,2[$, e também, em $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, porque $\left[0,\frac{1}{2}\right] \subset [0,2[$

Como $-3{,}19 < -3 < -2{,}32$, ou seja, $f(0) < -3 < f\left(\frac{1}{2}\right)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in \left]0,\frac{1}{2}\right[$ tal que $f(c)=-3$, ou seja, que a equação $f(x)=-3$ tem, pelo menos, uma solução em $\left]0,\frac{1}{2}\right[$

C.A.

$$f(0) = \frac{e^{2-0}-1}{0-2} = \frac{e^2-1}{-2} \approx -3{,}19$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{2-\frac{1}{2}}-1}{\frac{1}{2}-2} = \frac{e^{\frac{3}{2}}-1}{-\frac{3}{2}} \approx -2{,}32$$

5.3. Começamos por determinar a expressão da derivada, em $]2,+\infty[$:

$$\left(\frac{x+1}{\ln(x+1)}\right)' = \frac{(x+1)'\ln(x+1)-(x+1)\big(\ln(x+1)\big)'}{\big(\ln(x+1)\big)^2} = \frac{(1+0)\ln(x+1)-(x+1)\times\dfrac{(x+1)'}{(x+1)}}{\big(\ln(x+1)\big)^2)} =$$

$$= \frac{\ln(x+1)-(x+1)'}{\big(\ln(x+1)\big)^2} = \frac{\ln(x+1)-1}{\big(\ln(x+1)\big)^2}$$

Determinando os zeros da derivada, em $]2,+\infty[$, temos:

$$\frac{\ln(x+1)-1}{\big(\ln(x+1)\big)^2}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \ln(x+1)-1=0 \,\wedge\, \underbrace{\big(\ln(x+1)\big)^2\neq 0}_{PV, x>2\Rightarrow\ln(x+1)>\ln 3} \quad\Leftrightarrow\quad \ln(x+1)=1 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)=e^1 \quad\Leftrightarrow\quad x=e-1$$

Logo, como $e-1<2$, a função derivada não tem zeros em $]2,+\infty[$.
Como, para $x>2$,

- $\ln(x+1)-1>\ln(3)-1$, temos que $\ln(x+1)-1>0\,,\forall x\in]2,+\infty[$
- $\ln(x+1)\neq 0$, temos que $\big(\ln(x+1)\big)^2>0\,,\forall x\in]2,+\infty[$

temos que f' é sempre positiva no intervalo $]2,+\infty[$, o que significa que a função f é sempre crescente neste intervalo.

6. Começamos por determinar $f'(x)$:
$f'(x)=(a\cos(nx)+b\,\mathrm{sen}\,(nx))'=(a\cos(nx))'+(b\,\mathrm{sen}\,(nx))'=a(nx)'(-\mathrm{sen}\,(nx))+(b(nx)'\cos(nx)=$
$=-an\,\mathrm{sen}\,(nx)+bn\cos(nx)$

Determinamos em seguida $f''(x)$:
$f''(x)=(f'(x))'=(-an\,\mathrm{sen}\,(nx)+bn\cos(nx))'=(-an\,\mathrm{sen}\,(nx))'+(bn\cos(nx))'=$
$=-an(nx)'\cos(nx)+bn(nx)'(-\mathrm{sen}\,(nx))=-an^2\cos(nx)-bn^2\,\mathrm{sen}\,(nx)=$
$=-n^2\,(a\cos(nx)+b\,\mathrm{sen}\,(nx))=$
$=-n^2\,(f(x))$

Assim temos que: $\qquad f''(x)+n^2f(x)=-n^2f(x)+n^2f(x)=0\,,\;\; q.e.d.$