

Exame nacional de Matemática A (2011, 1.ª fase)

Proposta de resolução



GRUPO I

1. A igualdade da opção A é válida para acontecimentos contrários, a igualdade da opção B é válida para acontecimentos incompatíveis e a condição da opção C é válida para acontecimentos não equiprováveis. Como A e B são dois acontecimentos independentes, sabemos que $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$; e assim, temos que:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(A)} = P(B)$$

Resposta: **Opção D**

2. Como o código tem 4 algarismos e sabemos que 2 deles são «7» e os restantes 2 são diferentes de «7», podemos começar por calcular o número de situações diferentes em que os algarismos 7 podem ser dispostos (4C_2 , que corresponde a selecionar 2 das 4 posições do código, sem considerar a ordem, porque estas posições serão ambas ocupadas por algarismos iguais - o algarismo «7»). Depois, por cada uma destas escolhas, existem 9 hipóteses (todos os algarismos à exceção do «7») para ocupar a primeira posição não ocupada, e outras 9 para a segunda posição não ocupada, pelo que o número total de códigos pode ser calculado como:

$${}^4C_2 \times 9 \times 9 = 486$$

Resposta: **Opção A**

3. Como a reta $y = 2x - 4$ é assíntota do gráfico de g , temos que:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 2$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 2x) = -4$

Da definição de assíntota temos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - (2x - 4)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 2x + 4) = 0$$

Resposta: **Opção C**

4. Analisando cada uma das opções, temos:

- Como $f(0) = 2^0 - 9 = 1 - 9 = -8$ e $f(1) = 2^1 - 9 = 2 - 9 = -7$, não se verifica a condição $f(0) < 0 < f(1)$, pelo que o teorema de Bolzano não permite garantir a existência de, pelo menos, um zero da função f no intervalo $]0, 1[$
- Como $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} (2^x - 9) = 2^5 - 9 = 23$ e $f(5) = \frac{1 - e^5}{5}$, temos que $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) \neq f(5)$, pelo que a função f não é contínua para $x = 5$, logo não é contínua no intervalo $]4, 6[$, pelo que o teorema de Bolzano não permite garantir a existência de, pelo menos, um zero da função f nesse intervalo
- Como $f(6) = \frac{1 - e^6}{6} \approx -67$ e $f(7) = \frac{1 - e^7}{7} \approx -157$, não se verifica a condição $f(6) < 0 < f(7)$, pelo que o teorema de Bolzano não permite garantir a existência de, pelo menos, um zero da função f no intervalo $]6, 7[$

Assim, de entre as opções apresentadas o intervalo $]1, 4[$ é o único em que o teorema de Bolzano permite garantir a existência de, pelo menos, um zero da função f :

Como a função f resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $[0, 5[$, é contínua em $[0, 5[$, e também, em $[1, 4]$, porque $[1, 4] \subset [0, 5[$

C.A.

Como $-7 < 0 < 7$, ou seja, $f(1) < 0 < f(4)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]1, 4[$ tal que $f(c) = 0$, ou seja, que existe, pelo menos, um zero da função f no intervalo $]1, 4[$

$$f(1) = 2^1 - 9 = 2 - 9 = -7$$

$$f(4) = 2^4 - 9 = 16 - 9 = 7$$

Resposta: **Opção B**

5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \left(\frac{x}{2} \right)}{x} \right)^2 = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \left(\frac{x}{2} \right)}{x} \right)^2 =$$

(fazendo $y = \frac{x}{2}$ temos que $x = 2y$, e se $x \rightarrow 0$, então $y \rightarrow 0$)

$$= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin y}{2y} \right)^2 = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \times \frac{\sin y}{y} \right) \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \times 1 \right)^2 = \frac{1}{4}$$

Resposta: **Opção C**

6. Pela observação do gráfico podemos afirmar que:

- Em $x = -3$ a função é crescente, ou seja, $f'(-3) > 0$
- Em $x = 0$ a função é decrescente, ou seja, $f'(0) < 0$
- Em $x = 6$ a função é crescente, ou seja, $f'(6) > 0$

Assim, temos que:

- $f'(0) \times f'(6) < 0$
- $f'(-3) \times f'(6) > 0$
- $f'(-3) \times f'(0) < 0$
- $f'(0) \times f'(6) < 0$

Resposta: **Opção D**



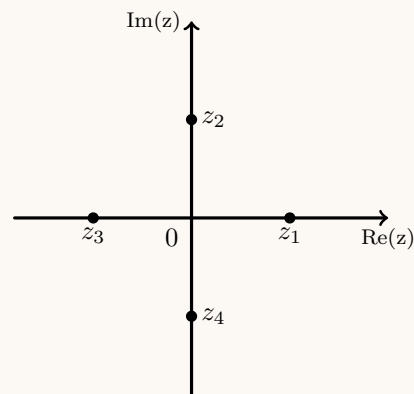
7. Sabemos que $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$ e $i^3 = -i$, e que é válida a igualdade $i^n = i^k$, onde k é o resto da divisão inteira de n por 4.

Assim,

- como $4n = 4 \times n + 0$, temos que $i^{4n} = i^0 = 1$
- como $4n + 1 = 4 \times n + 1$ temos que $i^{4n+1} = i^1 = i$
- como $4n + 2 = 4 \times n + 2$ temos que $i^{4n+2} = i^2 = -1$

Assim temos que:

$$i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2} = 1 + i - 1 = i, \text{ pelo que, de acordo com a figura, temos que } i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2} = z_2$$



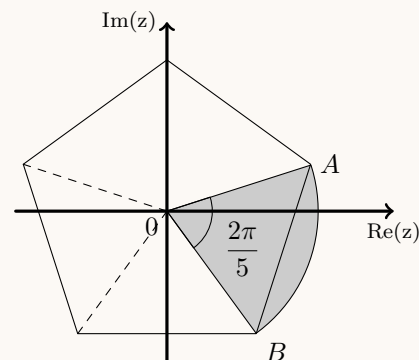
Resposta: **Opção B**

8. Como a área do setor circular é dada por $\frac{\alpha r^2}{2}$, onde α é a amplitude do ângulo ao centro do setor circular e r o raio da circunferência, e designado por w o número complexos que tem por imagem geométrica o ponto A , temos que:

- $r = |w| = \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$ (usando a fórmula de Moivre);
- α é a amplitude do ângulo AOB e como A e B são vértices adjacentes de um pentágono regular centrado na origem (por serem raízes de índice 5 de um mesmo número complexo) temos que $\alpha = \frac{2\pi}{5}$

Logo o valor da área do setor circular AOB é

$$\frac{\alpha r^2}{2} = \frac{\frac{2\pi}{5} \times 2^2}{2} = \frac{2\pi}{5} \times 2 = \frac{4\pi}{5}$$



Resposta: **Opção B**

GRUPO II

1.

- 1.1. Como z_1 é raiz do polinómio, este é divisível por $(z - 1)$, pelo que podemos usar a regra de Ruffini para fazer a divisão e obter um polinómio de grau 2.

E assim temos que

$$z^3 - z^2 + 16z - 16 = (z - 1)(z^2 + 0z + 16) + 0 = (z - 1)(z^2 + 16)$$

Podemos agora determinar as raízes do polinómio $z^2 + 16$ (que também são raízes do polinómio $z^3 - z^2 + 16z - 16$) resolvendo a equação $z^2 + 16 = 0$:

$$z^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -16 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{-16} \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{16 \times (-1)} \Leftrightarrow z = 4i \vee z = -4i$$

Escrevendo as raízes encontradas na f.t., temos:

$$z = 4 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} \vee z = 4 \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{2} \right)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 16 & -16 \\ 1 & & 1 & 0 & 16 \\ \hline & 1 & 0 & 16 & 0 \end{array}$$



1.2. Começamos por escrever z_2 na f.t. e calcular o produto $z_2 \times z_3$ na f.t.:

Como z_2 é um imaginário puro, $\arg(z_2) = \frac{\pi}{2}$ e $|z_2| = 5$, pelo que $z_2 = 5 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$

Assim temos que:

$$z_2 \times z_3 = \left(5 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}\right) \times \left(\operatorname{cis} \left(\frac{n\pi}{40}\right)\right) = (5 \times 1) \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{40}\right) = 5 \operatorname{cis} \left(\frac{20\pi}{40} + \frac{n\pi}{40}\right) = 5 \operatorname{cis} \frac{20\pi + n\pi}{40}$$

Como a representação geométrica do número complexo $z_2 \times z_3$ está no terceiro quadrante e pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares se

$$\arg(z_2 \times z_3) = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{4\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{8k\pi}{4} = \frac{5\pi + 8k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}, \text{ vem que:}$$

$$\frac{20\pi + n\pi}{40} = \frac{5\pi + 8k\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{20\pi + n\pi}{40} = \frac{50\pi + 80k\pi}{40} \Leftrightarrow 20\pi + n\pi = 50\pi + 80k\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20 + n = 50 + 80k \Leftrightarrow n = 30 + 80k, k \in \mathbb{Z}$$

Substituindo k por valores inteiros, vem que:

- $k = -1$, temos $n = -50$;
- $k = 0$, temos $n = 30$;
- $k = 1$, temos $n = 110$;

Logo, o menor valor natural de n é 30.

2.

2.1. Como a experiência «*Um jovem compra o bilhete*» se repete várias vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades da variável X : «*Número de jovens que usa o multibanco no pagamento*», segue o modelo binomial ($P(X = k) = {}^n C_k p^k q^{n-k}$).

Temos que:

- $n = 9$ (serão comprados bilhetes 9 vezes de forma independente).
- $p = 0,6$ (é a probabilidade do sucesso, ou seja "O jovem usa o multibanco no pagamento")
- $q = 0,4$, a probabilidade do insucesso pode ser calculada como $q = 1 - 0,6 = 0,4$

Assim, calculando da ocorrência de 6 sucessos ($k = 6$) no conjunto das 9 repetições da experiência, e arredondando o resultado às centésimas, temos:

$$P(X = 6) = {}^9 C_6 (0,6)^6 (0,4)^3 \approx 0,25$$

2.2. Considerando a experiência aleatória que consiste em seleccionar, ao acaso, um cliente desta companhia aérea, e os acontecimentos:

B : «O cliente ter comprado um bilhete para Berlim»

V : «O cliente faz a viagem sem perder o voo»

$$\text{Temos que } P(\bar{V}|B) = \frac{5}{100} = 0,05, P(V|\bar{B}) = \frac{92}{100} = 0,92 \text{ e } P(B) = \frac{30}{100} = 0,3$$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P(\bar{V} \cap B) = P(B) \times P(\bar{V}|B) = 0,3 \times 0,05 = 0,015$
- $P(\bar{B}) = P(B) = 1 - 0,3 = 0,7$
- $P(V \cap \bar{B}) = P(\bar{B}) \times P(V|\bar{B}) = 0,7 \times 0,92 = 0,644$
- $P(\bar{V} \cap \bar{B}) = P(\bar{B}) - P(V \cap \bar{B}) = 0,7 - 0,644 = 0,056$

	B	\bar{B}	
V		0,644	
\bar{V}	0,015	0,056	0,071
	0,3	0,7	1

Assim, calculando a probabilidade de um passageiro desta companhia aérea perder o voo, e escrevendo o resultado na forma de dízima, temos

$$P(\bar{V}) = P(\bar{V} \cap B) + P(\bar{V} \cap \bar{B}) = 0,015 + 0,056 = 0,071$$



3. Temos que:

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{1 - P(B)}{P(A)} &= \frac{P(A)}{P(A)} - \frac{1 - P(B)}{P(A)} \\
 &= \frac{P(A) - 1 + P(B)}{P(A)} \\
 &= \frac{P(A) + P(B) - (P(A \cup B) + P(\overline{A \cup B}))}{P(A)} \\
 &= \frac{P(A) + P(B) - P(A \cup B) - P(\overline{A \cup B})}{P(A)} \\
 &= \frac{P(A \cap B) - P(\overline{A \cup B})}{P(A)} \\
 &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} - \frac{P(\overline{A \cup B})}{P(A)} \\
 &= P(B|A) - \frac{P(\overline{A \cup B})}{P(A)}
 \end{aligned}$$

Teorema: $P(X) + P(\overline{X}) = 1$

Teorema: $P(X \cap Y) = P(X) - P(Y) - P(X \cup Y)$

Definição: $P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$

$$\text{Logo } 1 - \frac{1 - P(B)}{P(A)} = P(B|A) - \frac{P(\overline{A \cup B})}{P(A)} \Leftrightarrow P(B|A) = 1 - \frac{1 - P(B)}{P(A)} + \frac{P(\overline{A \cup B})}{P(A)}$$

$$\text{Como } \frac{P(\overline{A \cup B})}{P(A)} \geq 0, \text{ então } P(B|A) \geq 1 - \frac{1 - P(B)}{P(A)} \text{ q.e.d.}$$

4. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$\begin{aligned}
 T'(t) &= (15 + 0,1t^2e^{-0,15t})' = (15)' + (0,1t^2e^{-0,15t})' = 0 + 0,1((t^2)'e^{-0,15t} + t^2(e^{-0,15t})') = \\
 &= 0,1(2t \times e^{-0,15t} + t^2(-0,15)e^{-0,15t}) = 0,1(2te^{-0,15t} - 0,15t^2e^{-0,15t}) = \\
 &= 0,2te^{-0,15t} - 0,015t^2e^{-0,15t} = te^{-0,15t}(0,2 - 0,015t)
 \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$\begin{aligned}
 T'(t) = 0 &\Leftrightarrow te^{-0,15t}(0,2 - 0,015t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee \underbrace{e^{-0,15t} = 0}_{\text{Eq. Imp., } e^{-0,15t} > 0} \vee 0,2 - 0,015t = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow t = 0 \vee 0,2 = 0,015t \Leftrightarrow t = 0 \vee \frac{0,2}{0,015} = t \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{40}{3}
 \end{aligned}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

t	0		$\frac{40}{3}$		20
$T'(x)$	0	+	0	-	-
$T(x)$	min	\nearrow	Máx	\searrow	

Assim, como C é crescente no intervalo $[0, \frac{40}{3}]$ e decrescente no intervalo $[\frac{40}{3}, 20]$ podemos concluir que $\frac{40}{3}$ é único o maximizante da função.

Como $\frac{40}{3} \approx 13,333$ corresponde a 13 horas e $0,333 \times 60$ minutos (ou seja 20 minutos), temos que às 13 horas e 20 minutos do dia 1 de Abril de 2010, se registou, no museu, a temperatura ambiente máxima.



5.

5.1. Averiguando a existência de assintotas horizontais, temos:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x-1} = \frac{3}{-\infty-1} = \frac{3}{-\infty} = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2+\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} + \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim notável}} = \frac{2}{+\infty} + 0 = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Pelo que podemos afirmar que a reta de equação $y = 0$ é a assintota horizontal do gráfico de f .

Determinando a expressão da derivada, para $x > 1$, temos:

$$\left(\frac{2+\ln x}{x} \right)' = \frac{(2+\ln x)'(x) - (2+\ln x)(x)'}{x^2} = \frac{\left(0 + \frac{1}{x}\right)(x) - (2+\ln x)(1)}{x^2} = \frac{1-2-\ln x}{x^2} = \frac{-1-\ln x}{x^2}$$

Como $e > 1$, o declive da reta tangente no ponto de abscissa e , é dado por:

$$m = f'(e) = \frac{-1-\ln e}{e^2} = \frac{-1-1}{e^2} = \frac{-2}{e^2}$$

Determinando a ordenada do ponto do gráfico de abscissa e , temos:

$$f(e) = \frac{2+\ln e}{e} = \frac{2+1}{e} = \frac{3}{e}$$

Como o ponto de abscissa e , também pertence à reta tangente, substituímos as coordenadas deste ponto e o declive da reta, em $y = mx + b$, para calcular o valor de b :

$$\frac{3}{e} = \frac{-2}{e^2} \times e + b \Leftrightarrow \frac{3}{e} = -\frac{2}{e} + b \Leftrightarrow \frac{3}{e} + \frac{2}{e} = b \Leftrightarrow \frac{5}{e} = b$$

Desta forma, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa e , é:

$$y = -\frac{2}{e^2} \times x + \frac{5}{e}$$

E a abscissa do ponto de intersecção com a reta de equação $y = 0$ (a assintota horizontal), pode ser calculada como:

$$y = -\frac{2}{e^2} \times x + \frac{5}{e} \wedge y = 0 \Leftrightarrow 0 = -\frac{2}{e^2} \times x + \frac{5}{e} \Leftrightarrow \frac{2}{e^2} \times x = \frac{5}{e} \Leftrightarrow x = \frac{5e^2}{2e} \Leftrightarrow x = \frac{5e}{2}$$

Ou seja, as coordenadas do ponto de intersecção da assintota horizontal com a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa e , são

$$P\left(\frac{5e}{2}, 0\right)$$



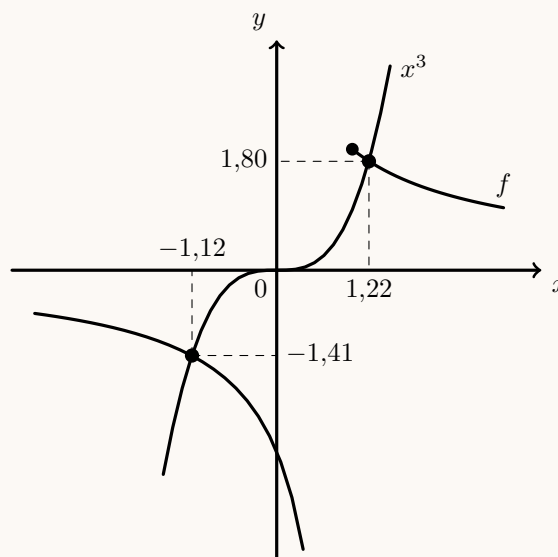
5.2. Os pontos do plano cuja ordenada é o cubo da abscissa estão sobre o gráfico da função $g(x) = x^3$.

Assim, as abscissas dos pontos do gráfico de f que verificam esta condição são as soluções da equação:

$$f(x) = x^3$$

Logo, traçando na calculadora o gráfico da função f , respeitando o domínio de cada um dos ramos, e a função $g(x) = x^3$ numa janela que permita identificar os pontos de interseção dos gráficos, obtemos o gráfico que se reproduz na figura ao lado.

Recorrendo à função da calculadora que permite determinar valores aproximados de um ponto de interseção de dois gráficos, determinamos o valor das coordenadas dos dois pontos em que o gráfico da função f intersesta o gráfico da função g . Os valores das coordenadas (com aproximação às centésimas) são $(-1,12; -1,41)$ e $(1,22,1,80)$



6.

6.1. Podemos calcular a área do trapézio como a soma das áreas do retângulo $[ODCB]$ e do triângulo $[OAB]$.

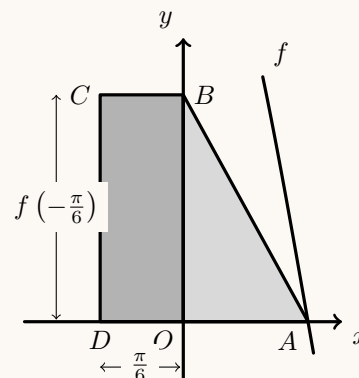
A base do retângulo é dada pela distância do ponto D à origem:

$$\overline{OD} = |x_D| = \left| -\frac{\pi}{6} \right| = \frac{\pi}{6}$$

e a altura é a ordenada do ponto C :

$$\begin{aligned} \overline{DC} &= f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 4 \cos\left(2\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 4 \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \\ &= 4 \cos\frac{\pi}{3} = 4 \times \frac{1}{2} = 2 \end{aligned}$$

A altura do triângulo também é ordenada do ponto C , $\overline{OB} = \overline{DC}$ e a base é a menor abscissa do ponto A , ou seja, a solução positiva da equação $f(x) = 0$.



Assim, resolvendo a equação vem:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4 \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, para $k = 0$, a menor solução positiva da equação é $x = \frac{\pi}{4}$

Assim, calculando a área do trapézio, vem:

$$A_{[ABCD]} = A_{[ODCB]} + A_{[OAB]} = \overline{OD} \times \overline{DC} + \frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2} = \frac{\pi}{6} \times 2 + \frac{\frac{\pi}{4} \times 2}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$$



6.2. Determinando a expressão da primeira derivada de f , vem:

$$f'(x) = (4 \cos(2x))' = 4(2x)'(-\sin(2x)) = 4 \times 2 \times (-\sin(2x)) = -8 \sin(2x)$$

Depois, determinando a expressão da segunda derivada, vem:

$$f''(x) = (f'(x))' = (-8 \sin(2x))' = -8(2x)' \cos(2x) = -16 \cos(2x)$$




Assim, temos que, para qualquer número real x ,

$$\begin{aligned} f(x) + f'(x) + f''(x) &= (4 \cos(2x)) + (-8 \sin(2x)) + (-16 \cos(2x)) = 4 \cos(2x) - 16 \cos(2x) - 8 \sin(2x) = \\ &= -12 \cos(2x) - 8 \sin(2x) = -4 \times 3 \cos(2x) - 4 \times 2 \sin(2x) = -4(3 \cos(2x) + 2 \sin(2x)), \text{ q.e.d.} \end{aligned}$$

7. Para estudar o sentido das concavidades do gráfico de f , determinamos os zeros da segunda derivada:

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow g(x) \times (x^2 - 5x + 4) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{g(x) = 0}_{\text{Eq. imp., } g(x) > 0} \vee x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times 4}}{2(1)} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 4 \end{aligned}$$

Como $g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, podemos estudar o sinal de f'' e relacionar com o sentido das concavidades do gráfico de f , vem:

x	$-\infty$	1		4	$+\infty$
$g(x)$	+	+	+	+	+
$x^2 - 5x + 4$	+	0	-	0	+
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		Pt. I.		Pt. I.	

- Assim, por observação do gráfico da função da opção (I) podemos rejeitar esta hipótese, porque o sentido das concavidades é o oposto do que foi estudado.
- Relativamente à opção (II), podemos observar que $f(1) > 0$ e $f(4) < 0$, logo $f(1) \times f(4) < 0$ o que contraria a informação do enunciado ($f(1) \times f(4) > 0$), pelo que esta hipótese também é excluída.
- Observando o gráfico da opção (IV), constatamos que existe um ponto ($x = a$) em que a função não é contínua. Neste caso a primeira derivada, neste ponto não estaria definida (não existe $f'(a)$ e conseqüentemente também a segunda derivada não estaria definida ($f''(a)$ não existe), o que contraria a informação do enunciado, que afirma que f'' tem domínio \mathbb{R} .

Assim, temos que, a única opção coerente com todos os dados do enunciado é a opção (III).

