Exame nacional de Matemática A **(2010, 2.ª fase)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Como só existem bolas azuis e roxas, e a probabilidade de extrair uma bola da caixa, e ela ser azul é igual a $\frac{1}{2}$, então existem tantas bolas azuis como roxas, ou seja, existem 8 bolas roxas na caixa.

   Resposta: **Opção C**

2. Como os números têm cinco algarismos, e três deles são o algarismo ≪5≫ podemos calcular o número de formas diferentes de dispor os 3 algarismos ≪5≫ nas 5 posições do número (${}^5C_3$, não se considera relevante a ordem, por serem algarismos iguais).
   Assim, por cada disposição dos algarismos ≪5≫ existem 4 hipóteses (≪6≫, ≪7≫, ≪8≫ e o ≪9≫) para ocupar a primeira posição livre do algarismo, e ainda outras 4 para a segunda posição livre do algarismo.
   Logo, a quantidade de números deste tipo que tem exatamente 3 algarismos ≪5≫ é

   $${}^5C_3 \times 4 \times 4 = {}^5C_3 \times 4^2$$

   Resposta: **Opção B**

3. Somando quaisquer dois números, dos que estão reproduzidos no enunciado, o resultado é sempre um número diferente de 105.
   Como os restantes números da mesma linha do triângulo de Pascal são todos maiores que 105, somando quaisquer dois deles, ou um deles com um dos elementos reproduzidos, o resultado será sempre superior a 105.
   Assim, não existe qualquer par de elementos desta linha do triângulo de Pascal, cuja soma seja 105, ou seja, a probabilidade da soma de dois elementos desta linha do triângulo de Pascal ser igual a 105, é nula.

   Resposta: **Opção D**

4. Como $\lim\limits_{x\to+\infty}(h(x)-2x)=0$, temos que

   $$\lim_{x\to+\infty}(h(x)-2x)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}h(x)-\lim_{x\to+\infty}(2x)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}(2x) \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}(h(x))=+\infty$$

   Como a função h é par, temos que, para qualquer $x\in\mathbb{R}$, $f(-x)=f(x)$ e assim,

   $$\lim_{x\to-\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$$

   Resposta: **Opção A**

5. Como $\lim u_n = \lim \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{+\infty} = 0^+$, então:

$$\lim_{n \to +\infty} g(u_n) = \lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \ln x = \ln 0^+ = -\infty$$

Resposta: **Opção D**

6. Representando a informação do gráfico sob a forma de uma tabela, temos:

x		0		a	
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$	Máx	$\searrow$

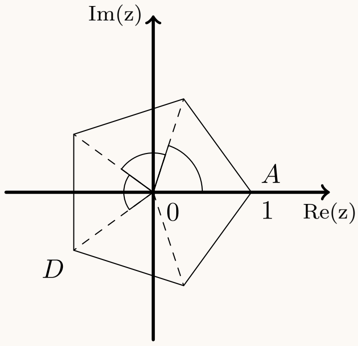
Assim, podemos verificar que a função f é crescente em $]0, a[$

Resposta: **Opção C**

7. Os vértices do pentágono são a representação geométrica de 5 números complexos, que são raízes de índice 5 do mesmo número complexo. Sejam z e w os números complexos que têm por imagens geométricas os pontos A e D, respetivamente.

Como o ponto A tem de coordenadas (1,0), temos que $z = \operatorname{cis} 0$.

Como $|z| = |w|$ e $\arg(w) = 3 \times \frac{2\pi}{5} = \frac{6\pi}{5}$, porque os vértices do pentágono dividem o ângulo giro em 5 partes iguais, temos que $w = \operatorname{cis} \frac{6\pi}{5}$



Resposta: **Opção B**

8. Como a representação geométrica de w está sobre a parte negativa do eixo imaginário, sabemos que $w = \rho \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}$.

Assim, recorrendo à fórmula de Moivre, temos que $w^6 = \rho^6 \operatorname{cis}\left(6 \times \frac{3\pi}{2}\right) = \rho^6 \operatorname{cis} \frac{18\pi}{2} = \rho^6 \operatorname{cis}(9\pi)$

Descontando as voltas completas, temos que $w^6 = \rho^6 \operatorname{cis}(9\pi) = \rho^6 \operatorname{cis}(9\pi - 8\pi) = \rho^6 \operatorname{cis} \pi$, logo podemos concluir que w^6 é um número real negativo.

Resposta: **Opção A**

GRUPO II

1.

1.1. Começamos por determinar z^4, recorrendo à fórmula de Moivre:

$$z^4 = \left(\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^4 = (\sqrt{2})^4 \operatorname{cis}\left(4 \times \frac{\pi}{4}\right) = 4\operatorname{cis}\pi = -4 + 0i = -4$$

Assim temos que:

$$w = \frac{z^4 + 4i}{i} = \frac{-4 + 4i}{i} = \frac{(-4 + 4i) \times i}{i \times i} = \frac{-4i + 4i^2}{i^2} = \frac{-4 - 4i}{-1} = 4 + 4i$$

Escrevendo w na f.t. temos $w = \rho\operatorname{cis}\theta$, onde:

- $\rho = |w| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{4^2 \times 2} = 4\sqrt{2}$
- $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{1} = 1$; como $\operatorname{sen}\theta > 0$ e $\cos\theta > 0$, θ é um ângulo do 1º quadrante, logo $\theta = \frac{\pi}{4}$

Logo $w = 4\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$

1.2. Começamos por escrever z_1 na f.a.:

$$z_1 = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{2}{2} + \frac{2}{2}i = 1 + i$$

O raio da da circunferência é $|z_2 - z_1|$, ou seja, a distância entre as representações geométricas dos dois números complexos. Logo temos que :
$|z_2 - z_1| = |3 - (1 + i)| = |3 - 1 - i| = |2 - i| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$
Assim a circunferência que tem centro na imagem geométrica de z_2 e que passa na imagem geométrica de z_1 é definida por:

$$|z - z_2| = |z_2 - z_1| \quad \Leftrightarrow \quad |z - 3| = \sqrt{5}$$

2.

2.1. Organizando todas as somas possíveis numa tabela, temos:

Dado A / Dado B	0	0	0	0	-1	-2
-1	-1	-1	-1	-1	-2	-3
1	1	1	1	1	0	-1
1	1	1	1	1	0	-1
1	1	1	1	1	0	-1
1	1	1	1	1	0	-1
1	1	1	1	1	0	-1

Logo, pela observação da tabela, podemos observar os valores possíveis para a soma e as respetivas probabilidades:

- $P(X = -3) = \frac{1}{36}$
- $P(X = -2) = \frac{1}{36}$
- $P(X = -1) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$
- $P(X = 0) = \frac{5}{36}$
- $P(X = 1) = \frac{4 \times 5}{36} = \frac{4 \times 5}{4 \times 9} = \frac{5}{9}$

E assim, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	-3	-2	-1	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{9}$

2.2. No contexto da situação descrita, $P(L|J)$ é a probabilidade de que lançando os dois dados e usando os números indicados pelos dados como coordenadas do ponto Q, este ponto pertença ao terceiro quadrante, sabendo que o número indicado pelo dado A é negativo.
Como é sabido que a abcissa do ponto Q é negativa, este ponto pertence ao terceiro quadrante se a ordenada também for negativa, o que ocorre 1 em cada 6 vezes, visto que das 6 faces do dado B, apenas uma tem um número negativo inscrito.
Assim, usando a Regra de Laplace, e escrevendo o resultado na forma de fração, temos

$$P(L|J) = \frac{1}{6}$$

3. Temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{P(A \cup B)}{P(B)} - P\left(\overline{A}|B\right) &= \frac{P(A \cup B)}{P(B)} - \frac{P\left(\overline{A} \cap B\right)}{P(B)} && \text{Definição: } P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} \\
&= \frac{P(A \cup B) - P\left(\overline{A} \cap B\right)}{P(B)} \\
&= \frac{P(A \cup B) - \big(P(B) - P(A \cap B)\big)}{P(B)} && \text{Teorema: } P\left(X \cap \overline{Y}\right) = P(X) - P(X \cap Y) \\
&= \frac{P(A \cup B) - P(B) + P(A \cap B)}{P(B)} \\
&= \frac{P(A)}{P(B)} && \text{Teorema: } P(X) = P(X \cup Y) + P(X \cap Y) - P(Y)
\end{aligned}$$

Logo, se $P(B) \neq 0$ então $\frac{P(A \cup B)}{P(B)} - P\left(\overline{A}|B\right) = \frac{P(A)}{P(B)}$ *q.e.d.*

4.

4.1. Como o domínio da função f é $]0, +\infty[$, só pode existir uma assíntota não oblíqua quando $x \to +\infty$.
Assim, averiguando a existência de uma assíntota de equação $y = mx + b$, quando $x \to +\infty$, vem:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{5}x - \ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{5}x}{x} - \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - \frac{1}{5} \times x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{5}x - \ln x - \frac{1}{5}x\right) = \lim_{x \to +\infty} (-\ln x) = -\infty$$

Logo, (como o b não é um número real) não existe qualquer assíntota oblíqua do gráfico de f

4.2. Começamos por determinar a expressão da derivada para $x > 2$:

$$\left(\frac{1}{5}x - \ln x\right)' = \left(\frac{1}{5}x\right)' - (\ln x)' = \frac{1}{5} - \frac{1}{x}$$

Calculando os zeros da derivada, em $]2,+\infty[$, temos:

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 5 \wedge \underbrace{x \neq 0}_{\text{PV, } x>2}$$

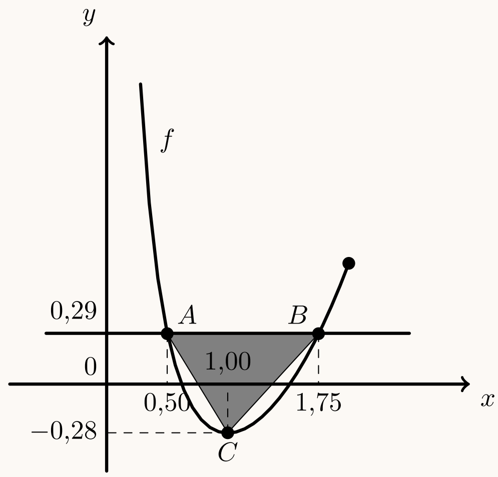
Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	2		5	$+\infty$
$f'(x)$	n.d.	$-$	0	$+$
$f(x)$	n.d.	$\searrow$	min	$\nearrow$

Assim, como f é decrescente no intervalo $]0,5]$ e crescente no intervalo $[5,+\infty[$ podemos concluir que 5 é único o minimizante da função no intervalo $]2,+\infty[$, pelo que $f(5)$ é um mínimo da função neste intervalo.

4.3. Como as abcissas dos pontos A e B são soluções da equação $f(x) = f(15)$, começamos por calcular $f(15) = \frac{1}{5}(15) - \ln(15) = 3 - \ln(15) \approx 0{,}29$

Podemos depois traçar na calculadora o gráfico da função f, no intervalo $]0,2]$, e a reta $y = 0{,}29$, para determinar os valores aproximados das soluções da equação $f(x) = f(15)$, ou seja as abcissas dos pontos A e B, e obtemos o gráfico que se reproduz na figura seguinte.



Recorrendo à função da calculadora que permite determinar as coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos, determinamos valores aproximados, às centésimas, das coordenadas dos pontos A e B:

$$A(0{,}50; 0{,}29) \text{ e } B(1{,}75; 0{,}29)$$

Para determinar as coordenadas do ponto C, usamos a função da calculadora que permite determinar o mínimo (e o minimizante) de uma função, num intervalo, e obtemos valores aproximados para as coordenadas do ponto C:

$$C(1{,}00; -0{,}28)$$

Logo podemos considerar como a medida da base do triângulo, a diferença das abcissas dos pontos A e B, e como a medida da altura a soma dos valores absolutos das ordenadas dos pontos A e C (como se pode ver na figura).
Assim, calculando a área do triângulo, e arredondando o resultado às décimas, vem:

$$A_{[OAB]} = \frac{(x_B - x_A) \times (y_A + |y_C|)}{2} \approx \frac{(1{,}75 - 0{,}50)(0{,}29 + 0{,}28)}{2} \approx 0{,}4$$

5.

5.1. Como a função f resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $\mathbb{R}$, é contínua em $\mathbb{R}$, e também, em $[-2,-1]$, porque $[-2,-1] \subset \mathbb{R}$

Como $1{,}050 < 1{,}5 < 2{,}000$, ou seja, $f(-1) < 1{,}5 < f(-2)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]-2,-1[$ tal que $f(c) = 1{,}5$, ou seja, que a equação $f(x) = 1{,}5$ tem, pelo menos, uma solução em $]-2,-1[$

C.A.

$$f(-2) = -(-2) + e^{2(-2)^3-1} = 2 + e^{2(-8)-1} =$$

$$= 2 + e^{-17} \approx 2{,}000$$

$$f(-1) = -(-1) + e^{2(-1)^3-1} = 1 + e^{2(-1)-1} =$$

$$= -1 + e^{-3} \approx 1{,}050$$

5.2. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = \left(-x + e^{2x^3-1}\right)' = -(x)' + \left(e^{2x^3-1}\right)' = -1 + (2x^3-1)'e^{2x^3-1} = -1 + 6x^2e^{2x^3-1}$$

Como o declive (m) da reta tangente ao gráfico de f em $x = 0$ é $f'(0)$, temos que:

$$m = f'(0) = -1 + 6(0)^2e^{2(0)^3-1} = -1 + 0 = -1$$

Determinando a ordenada do ponto do gráfico da função que tem abcissa zero, temos:

$$f(0) = -0 + e^{2(0)^3-1} = 0 + e^{0-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Como o ponto de abcissa 0, também pertence à reta tangente, substituímos as coordenadas deste ponto e o declive da reta, em $y = mx + b$, para calcular o valor de b:

$$\frac{1}{e} = -1 \times 0 + b \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{e} = 0 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{1}{e}$$

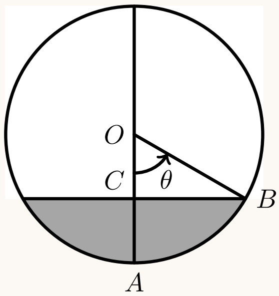
Desta forma, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0, é:

$$y = -x + \frac{1}{e}$$

6.

6.1. Analisando as figuras podemos dividir o cálculo da altura em dois casos:

No primeiro caso, $\left(\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$, $h = 3 - \overline{OC}$



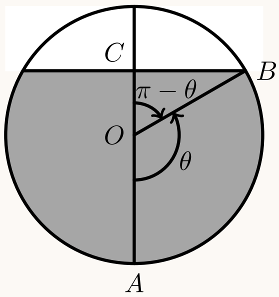
Como $\overline{OB} = 3$, recorrendo à definição de cosseno de um ângulo, temos:

$$\cos\theta = \frac{\overline{OC}}{3} \quad\Leftrightarrow\quad \overline{OC} = 3\cos\theta$$

e assim,

$$h = 3 - \overline{OC} = 3 - 3\cos\theta$$

No segundo caso, $\left(\theta \in \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[\right)$, $h = 3 + \overline{OC}$



Como $\overline{OB} = 3$, recorrendo à definição de cosseno de um ângulo, temos:

$$\cos(\pi-\theta) = \frac{\overline{OC}}{3} \quad\Leftrightarrow\quad \overline{OC} = 3\cos(\pi-\theta) \quad\Leftrightarrow\quad \overline{OC} = 3(-\cos\theta) \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \overline{OC} = -3\cos\theta$$

e assim,

$$h = 3 + \overline{OC} = 3 + (-3\cos\theta) = 3 - 3\cos\theta$$

Ou seja em ambos os casos, isto é, para qualquer $\theta \in]0,\pi[$, a altura h pode ser calculada como que $h(\theta) = 3 - 3\cos(\theta)$.

6.2. Como $h(\theta) = 3 - 3\cos(\theta)$, temos que:

$$h(\theta) = 3 \quad\Leftrightarrow\quad 3 - 3\cos(\theta) = 3 \quad\Leftrightarrow\quad -3\cos(\theta) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \cos(\theta) = 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \cos(\theta) = \cos\frac{\pi}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $\theta \in]0,\pi[$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ é a única solução da equação.

Calcular θ tal que $h(\theta) = 3$, significa determinar o ângulo associado a uma quantidade de combustível no depósito com 3 metros de altura.
Assim a solução calculada significa que, quando o combustível no depósito tiver uma altura de 3 metros, o ângulo θ será um ângulo reto $\left(\frac{\pi}{2} \text{ rad.}\right)$.