Exame 2010 – 1.ª Fase, versão 1 – Proposta de Resolução

Grupo I – Itens de escolha múltipla

1. Como A e B são acontecimentos incompatíveis então $P(A \cap B) = 0$. Assim:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Leftrightarrow 0{,}7 = 0{,}3 + P(B) \Leftrightarrow P(B) = 0{,}4 = 40\%$$

Resposta: B

2. Existe apenas um caso favorável à escolha dos três amigos, pois os três amigos constituem um único grupo. O número de casos possíveis é ${}^{10}C_3$ (dos dez trabalhadores escolhem-se três). Assim, a probabilidade pedida é $\frac{1}{{}^{10}C_3}$.

Resposta: C

3. A soma das probabilidades de uma distribuição de probabilidades é igual a 1. Assim:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + a + 2a = 1 \Leftrightarrow 3a = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3a = \frac{3}{10} \Leftrightarrow a = \frac{1}{10}$$

Logo, $P(X = 2) = 2 \times \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$, pelo que $P(X = 2) = P(X = 0)$.

Resposta: B

4. A função f é afim, logo é do tipo $f(x) = mx + b$, com $m < 0$ e $b > 0$ e portanto $f''(x) = 0$. Então:

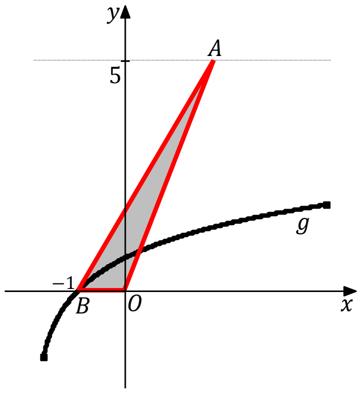
- $h'(x) = (f(x) + e^x)' = f'(x) + (e^x)' = f'(x) + e^x$
- $h''(x) = (f'(x) + e^x)' = f''(x) + (e^x)' = f''(x) + e^x = 0 + e^x = e^x$

Assim, a resposta correta é a representação gráfica da função e^x

Resposta: A

5. Como a reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical do gráfico de f, e pela observação do gráfico, conclui-se que $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$. Assim $\lim_{x \to 1^-} \frac{3x}{f(x)} = \frac{3 \times 1}{+\infty} = \frac{3}{+\infty} = 0$.

Resposta: C



6. O ponto B tem coordenadas $(-1{,}0)$, pois:

$$g(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x+2)=0 \Leftrightarrow x+2=e^0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=1-2 \Leftrightarrow x=-1$$

Considerando $[OB]$ a base do triângulo, tem-se $\overline{OB}=1$, a medida do comprimento da sua altura é igual à ordenada do ponto A, ou seja, 5. Portanto $A_{[AOB]}=\frac{1\times 5}{2}=\frac{5}{2}$.

Resposta: A

7. O número complexo z é um imaginário puro se o seu argumento for da forma $\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Assim:

$$\frac{\pi}{8}-\theta=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow -\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow -\theta=\frac{3\pi}{8}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta=-\frac{3\pi}{8}-k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Assim para $k=0$ vem $\theta=-\frac{3\pi}{8}$ e para $k=-1$ vem $\theta=\frac{5\pi}{8}$.

Resposta: D

8. Um número complexo cuja imagem geométrica esteja na região representada tem módulo superior a 3, eliminam-se assim as opções **A** e **C**. Esse número também não pode ser um imaginário puro, eliminando também a opção **D**, porque em **D**, está representado o número $3\sqrt{3}\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}=3\sqrt{3}i$.

Resposta: B

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1.

1.1. Tem-se $(z_1)^7=\left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{7}\right)^7=\operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{7}\right)=\operatorname{cis}\pi=-1$. Assim:

$$w=\frac{3-i\times(z_1)^7}{z_2}=\frac{3+i}{2-i}=\frac{3+i}{2-i}\times\frac{2+i}{2+i}=\frac{6+3i+2i+i^2}{2^2-i^2}=\frac{6+5i-1}{5}=\frac{5+5i}{5}=1+i$$

Para escrever w na forma trigonométrica vem:

- $|w|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$
- Sendo θ um argumento de w, tem-se $\operatorname{tg}\theta=\frac{1}{1}=1$ e $\theta\in 1.^\circ$ quadrante, portanto $\theta=\frac{\pi}{4}$.

Logo, $w=\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$.

1.2 Tem-se:

$$|z_1+z_2|^2=\left|\text{cis}\frac{\pi}{7}+2+i\right|^2=\left|\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+i\text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)+2+i\right|^2=\left|\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+2+\left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)+1\right)i\right|^2=$$

$$=\left(\sqrt{\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+2\right)^2+\left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)+1\right)^2}\right)^2=\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+2\right)^2+\left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)+1\right)^2$$

$$=\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right)+4\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+4+\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right)+2\text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)+1$$

$$=\underbrace{\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right)}_{1}+4\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+2\text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)+5$$

$$=1+4\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+2\text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)+5=6+4\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+2\text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

2.

2.1 Consideremos os seguintes acontecimentos:

C: «o aluno tem computador portátil»

D: «o aluno sabe o nome do diretor»

Do enunciado sabe-se que $P(C)=\frac{1}{5}$, $P(\overline{D})=\frac{1}{2}$ e $P(C|\overline{D})=\frac{1}{3}$. Pretende-se determinar $P(\overline{C}\cap D)$.

Tem-se $P(C|\overline{D})=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{P(C\cap\overline{D})}{P(\overline{D})}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\ P(C\cap\overline{D})=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$. Assim:

$$P(\overline{C}\cap D)=P\left(\overline{C\cup\overline{D}}\right)=1-P(C\cup\overline{D})=1-\left(P(C)+P(\overline{D})-P(C\cap\overline{D})\right)=$$

$$=1-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)=1-\frac{8}{15}=\frac{7}{15}$$

A probabilidade de um aluno dessa escola, escolhido ao acaso, não ter computador portátil e saber o nome do director é $\frac{7}{15}$.

Outra resolução: Considerando os mesmos acontecimentos, tem-se:

- $P(C|\bar{D}) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{P(C \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(C \cap \bar{D}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

Colocando estes valores numa tabela de dupla entrada e preenchendo as restantes células, vem:

	C	$\bar{C}$	p.m.
D	$\frac{1}{30}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{2}$
$\bar{D}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
p.m.	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	1

Justificações:

- $P(C \cap D) = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$
- $P(\bar{C} \cap D) = \frac{1}{2} - \frac{1}{30} = \frac{7}{15}$
- $P(\bar{C} \cap \bar{D}) = \frac{4}{5} - \frac{7}{15} = \frac{1}{3}$

Logo $P(\bar{C} \cap D) = \frac{7}{15}$.

2.2. O número de alunos da escola que têm computador portátil é $\frac{1}{5} \times 150 = 30$.

O número de maneiras diferentes de escolher exatamente quatro alunos entre os 30 com computador portátil é ${}^{30}C_4$.

O número de maneiras diferentes de escolher dois alunos entre os 120 que não têm computador portátil (porque queremos formar grupos de seis alunos) é ${}^{120}C_2$.

Portanto, o número de maneiras diferentes de formar uma comissão de seis alunos num universo de 150 onde exatamente quatro têm computador portátil (e portanto dois não têm computador portátil) é:

$${}^{30}C_4 \times {}^{120}C_2 = 195\,671\,700$$

3. O número de casos possíveis é dado por ${}^{18}C_2$, que é o número de maneiras distintas de escolher duas bolas entre as 18 que estão no saco. Tem-se ${}^{18}C_2 = \frac{18!}{2! \times (18-2)!} = \frac{18 \times 17 \times \cancel{16!}}{2 \times \cancel{16!}} = \frac{18 \times 17}{2}$.

Para as bolas serem da mesma cor então temos de escolher duas bolas azuis ou duas bolas vermelhas. Como ${}^{12}C_2$ é o número de maneiras distintas de escolher duas bolas azuis entre as 12 azuis que estão no saco e ${}^{6}C_2$ é o número de maneiras de escolher duas bolas vermelhas entre seis vermelhas que estão no saco, temos que o número de casos favoráveis é dado por ${}^{12}C_2 + {}^{6}C_2 = \frac{12 \times 11}{2} + \frac{6 \times 5}{2} = \frac{12 \times 11 + 6 \times 5}{2}$.

Pela lei de Laplace a probabilidade de um acontecimento é o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, quando estes são equiprováveis. Como qualquer uma das bolas tem igual probabilidade de ser escolhida, a lei de Laplace pode ser aplicada a este problema. Assim a probabilidade pedida é dada por:

$$\frac{{}^{12}C_2+{}^{6}C_2}{{}^{18}C_2}=\frac{\frac{12\times11+6\times5}{\cancel{2}}}{\frac{18\times17}{\cancel{2}}}=\frac{12\times11+6\times5}{18\times17}$$, que é a resposta do enunciado.

Nota: Como as bolas são retiradas em simultâneo estamos perante uma situação onde não há reposição. Observa que é indiferente tirar duas bolas, simultaneamente, ou tirar primeiro uma e depois a outra, sem repor a primeira bola extraída.

4.

4.1. Para $t\in[0,5]$, tem-se:

$$N(t)=8\log_4(3t+1)^3-8\log_4(3t+1)=3\times8\log_4(3t+1)-8\log_4(3t+1)=$$

$$=24\log_4(3t+1)-8\log_4(3t+1)=16\log_4(3t+1)$$

Outra resolução: Para $t\in[0,5]$, tem-se:

$$N(t)=8\log_4(3t+1)^3-8\log_4(3t+1)=8\big(\log_4(3t+1)^3-\log_4(3t+1)\big)=$$

$$=8\log_4\left(\frac{(3t+1)^3}{3t+1}\right)=8\log_4(3t+1)^2=2\times8\log_4(3t+1)=16\log_4(3t+1)$$

$\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$, com $x,y\in\mathbb{R}^+$ e $a\in\mathbb{R}^+\backslash\{1\}$

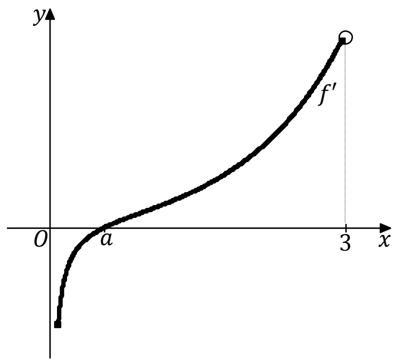
4.2. Tem-se que $2\,400$ unidades são 24 centenas. Assim:

$$N(t)=24\Leftrightarrow16\log_4(3t+1)=24\Leftrightarrow\log_4(3t+1)=\frac{24}{16}\Leftrightarrow\log_4(3t+1)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow3t+1=4^{\frac{3}{2}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow3t=\sqrt{4^3}-1\Leftrightarrow3t=\sqrt{64}-1\Leftrightarrow3t=8-1\Leftrightarrow3t=7\Leftrightarrow t=\frac{7}{3}$$

Como $\frac{1}{3}\times60=20$, vem que $\left(2+\frac{1}{3}\right)$ horas são 2 horas e 20 minutos. Assim, para vender $2\,400$ bilhetes foram necessárias 2 horas e 20 minutos.

5. Como conhecemos a função derivada de f, f', basta estudarmos o seu sinal. Utilizando o editor de funções da calculadora vamos definir a função $y_1 = f'(x) = e^x - \frac{1}{x}$ na janela de visualização $[0,3] \times [-10,25]$.



Assim, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = a$, com $a \approx 0{,}57$. Fazendo um quadro de variação do sinal de f', vem:

x	0		a		3
$f'(x)$	n.d.	$-$	0	$+$	n.d.
$f(x)$	n.d.	↘	min.	↗	n.d.

Como f' é negativa no intervalo $]0, a[$ então f é decrescente no intervalo $]0, a]$; como f' é positiva no intervalo $]a, 3[$ então f é crescente no intervalo $[a, 3[$; f tem mínimo relativo em $x = a$.

6.

6.1. O gráfico da função f só poderá ter uma assíntota oblíqua quando $x \longrightarrow -\infty$, pois o seu domínio é $]-\infty, 2\pi]$. A reta de equação $y = ax + b$ é assíntota oblíqua do gráfico de f se $a = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ e $b = \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - ax)$.

Assim:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{ax + b + e^x}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{ax}{x} + \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{b + e^x}{x} = a + \frac{b + e^{-\infty}}{-\infty} = a + \frac{b + 0}{-\infty} = a + \frac{b}{-\infty} = a + 0 = a$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - ax) = \lim\limits_{x \to -\infty} (\cancel{ax} + b + e^x - \cancel{ax}) = \lim\limits_{x \to -\infty} (b + e^x) = b + e^{-\infty} = b + 0 = b$

Logo a reta de equação $y = ax + b$ é uma assíntota oblíqua do gráfico de f, quando $\text{x} \longrightarrow -\infty$.

Outra resolução:

O gráfico da função f só poderá ter uma assíntota oblíqua quando $x \longrightarrow -\infty$, pois o seu domínio é $]-\infty, 2\pi]$. A reta de equação $y = ax + b$ é uma assíntota obliqua do gráfico de f se $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x) - (ax+b)\big) = 0$. Assim:

$$\lim_{x\to-\infty}\big(f(x) - (ax+b)\big) = \lim_{x\to-\infty}(\cancel{ax} + \cancel{b} + e^x - \cancel{ax} - \cancel{b}) = \lim_{x\to-\infty} e^x = e^{-\infty} = 0$$

Logo a reta de equação $y = ax + b$ é uma assíntota oblíqua do gráfico de f.

6.2. A função f é contínua em $x=0$ se e só se $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = f(0)$. Tem-se:

- $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-}(ax + b + e^x) = a\times0 + b + e^0 = b+1$

- $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{x-\operatorname{sen}(2x)}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{x}{x} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}\right) = \lim\limits_{x\to0^+}\left(1 - \frac{2\operatorname{sen}(2x)}{2x}\right) = 1 - 2\times\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x} =$

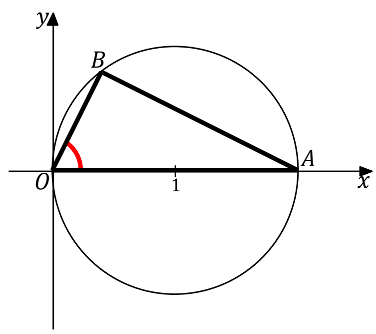
  $= 1 - 2\times1 = -1$

  Se $x \to 0^+$ então $2x \to 0^+$

- $f(0) = a\times0 + b + e^0 = b+1$

Assim, a função f é contínua em $x=0$ se e só se $b+1 = -1 \Leftrightarrow b = -2$.

7.1. Como o triângulo $[OAB]$ está inscrito numa semicircunferência, então é um triângulo retângulo em B, com $\overline{OA} = 2$. Tem-se:



- $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AB}}{2} \Leftrightarrow \overline{AB} = 2\operatorname{sen}\alpha$

- $\cos\alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\overline{OB}}{2} \Leftrightarrow \overline{OB} = 2\cos\alpha$

Assim:

$$P_{[OAB]} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{AB} = 2 + 2\cos\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha = \underbrace{2(1 + \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)}_{f(\alpha)}$$

7.2 Para determinar o valor de α para o qual perímetro do triângulo $[OAB]$ é máximo recorre-se ao estudo do sinal da derivada de f, f'. Tem-se:

- $f'(\alpha) = \left(2(1+\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha)\right)' = 2(-\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)$

- $f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2(-\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha) = 0 \Leftrightarrow -\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$, porque $\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

Fazendo um quadro de variação do sinal da função f', vem:

α	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\alpha)$	n.d.	$+$	0	$-$	n.d.
$f(\alpha)$	n.d.	$\nearrow$	máx.	$\searrow$	n.d.

Assim, o valor de α para o qual o perímetro do triângulo $[OAB]$ é máximo é $\frac{\pi}{4}$. (O perímetro máximo é $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4$).